Sulle trasformazioni geometriche nel piano cartesiano

Applicazione della glissosimmetria all'ellisse

Problema

Nel piano riferito ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali xOy si considerino la retta *a*:x-y+1=0, il vettore $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$ e l'ellisse $\gamma: \frac{x^2}{4}+y^2=1$. Risolvere i quesiti che seguono.

1) Scrivere le equazioni della traslazione τ definita dal vettore $\vec{u}$.
2) Determinare le equazioni della simmetria assiale σ_a avente per asse la retta *a*.
3) Determinare le equazioni cartesiane della trasformazione composta $\sigma_a \circ \tau$ (glissosimmetria[1]).
4) Determinare i punti comuni all'ellisse e alla retta *a* e rappresentarle nel riferimento cartesiano.
5) Determinare l'equazione dell'ellisse $\gamma'=\tau(\gamma)$ e dell'ellisse $\gamma''=\sigma_a(\gamma')$. Verificare che l'ellisse γ'' coincide con l'ellisse $(\sigma_a \circ \tau)(\gamma)$.
6) Determinare le equazioni della trasformazione $\tau \circ \sigma_a$, nonché l'equazione della curva trasformata $(\tau \circ \sigma_a)(\gamma)$ e confrontarla con la curva γ''.
7) Rappresentare in un'unica figura tutti gli elementi geometrici elaborati.

Elaborazioni

1. La traslazione definita dal vettore $\vec{u}$ trasforma il punto P(x;y) nel punto P'(x';y') tale che risulti $x'=x+1$, $y'=y+1$. La traslazione τ richiesta è:

$$\tau: \begin{cases} x'=x+1 \\ y'=y+1 \end{cases} \qquad (1.1)$$

2. La simmetria assiale di asse la retta *a* lascia fissi i punti dell'asse di simmetria e trasforma ogni altro punto $P_0(x_0;y_0)$ del piano nel punto $P_0'(x'_0;y'_0)$ tale che il punto medio M del segmento P_0P_0' appartenga alla retta *a* e il segmento P_0P_0' sia perpendicolare alla stessa retta.

   Le coordinate del punto medio M del suddetto segmento sono $x_M=\frac{x_0+x'_0}{2}$, $y_M=\frac{y_0+y'_0}{2}$ e imponendo che il punto appartenga all'asse di simmetria si ottiene il seguente vincolo per le coordinate:

$$\frac{x_0+x'_0}{2}-\frac{y_0+y'_0}{2}+1=0, \text{ da cui } x'_0-y'_0=-x_0+y_0-2 \qquad (2.1)$$

   Imponiamo ora che il segmento P_0P_0' sia perpendicolare all'asse di simmetria *a*.

[1] Una glissosimmetria è la composizione di una simmetria assiale con una traslazione determinata da un vettore parallelo all'asse di simmetria. Etimologia: il termine francese "*glisser*", significa "*scivolare*".

Il coefficiente angolare dell'asse di simmetria è m=1 e quello della retta del segmento P_0P_0' è $m'=\dfrac{y_0-y'_0}{x_0-x'_0}$; la perpendicolarità richiesta è assicurata dalla condizione $m\cdot m'=-1$, dunque deve risultare

$\dfrac{y_0-y'_0}{x_0-x'_0}=-1$, da cui si ricava $x'_0+y'_0=x_0+y_0$ (2.2)

Risolvendo il sistema composto dalle equazioni (2.1), (2.2) nelle incognite x'_0, y'_0, si trovano le coordinate del punto P_0'.

$\begin{cases} x'_0-y'_0=-x_0+y_0-2 \\ x'_0+y'_0=x_0+y_0 \end{cases}$ da cui si ricavano le equazioni della simmetria assiale

$$\sigma_a:\begin{cases} x'_0=y_0-1 \\ y'_0=x_0+1 \end{cases} \qquad (2.3)$$

3. La trasformazione ottenuta componendo la traslazione τ con la simmetria assiale σ_a è una **glissosimmetria** perché la traslazione è determinata da un vettore parallelo alla retta asse di simmetria. Per ottenere le equazioni della composizione consideriamo il generico punto P(x;y), quindi determiniamo il punto $P'=\tau(P)$ e successivamente il punto $P''=\sigma_a(P')$. Il percorso è indicato nel seguente diagramma di flusso:

$$P(x;y)\xrightarrow{\tau}P'(x'=x+1;y'=y+1)\xrightarrow{\sigma_a}P''(x''=y'-1;y''=x'+1)=$$
$$P''(x''=(y+1)-1;y''=(x+1)+1)=P''(x''=y;y''=x+2)$$

Concludiamo che le equazioni della glissosimmetria $\sigma_a\circ\tau$ sono

$$\sigma_a\circ\tau:\begin{cases} x''=y \\ y''=x+2 \end{cases} \qquad (3.1)$$

4. I punti comuni alla retta *a* e all'ellisse γ si determinano risolvendo il sistema formato con le loro equazioni.

$\begin{cases} a: x-y+1=0 \\ \gamma: \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=y-1 \\ (y-1)^2+4y^2=4 \end{cases}$, si ottiene l'equazione risolvente $5y^2-2y-3=0$ le cui radici sono $y_1=1, y_2=-\dfrac{3}{5}$. La retta e l'ellisse

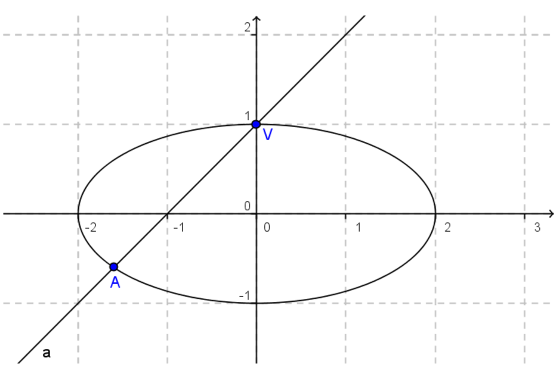

Figura 1

hanno come punti comuni $V(0;1)$, $A\left(-\frac{8}{5};-\frac{3}{5}\right)$.

5. Si ottiene l'equazione della curva $\gamma'=\tau(\gamma)$ ricavando x ed y in funzione di x', y'dalle equazioni della traslazione τ, quindi sostituendo le espressioni nell'equazione dell'ellisse γ, ciò fatto, eliminando gli apici si ricava l'equazione della curva richiesta.

$\tau:\begin{cases} x'=x+1 \\ y'=y+1 \end{cases} \to \begin{cases} x=x'-1 \\ y=y'-1 \end{cases}$; $\tau(\gamma): \frac{(x'-1)^2}{4}+(y'-1)^2=1$, dunque l'equazione della curva trasformata è $\gamma': \frac{(x-1)^2}{4}+(y-1)^2=1$. Si tratta dell'ellisse avente centro $C_1(1;1)$, semiasse maggiore *a*=2 e semiasse minore *b*=1, con i fuochi sull'asse di simmetria parallelo all'asse delle ascisse.

Per ottenere l'equazione della curva $\gamma''=\sigma_a(\gamma')$ occorre determinare le espressioni delle variabili x_0, y_0 (da sostituire rispettivamente con x ed y) che compaiono nelle equazioni della simmetria assiale (2.3) in funzione di x'_0, y'_0 (da sostituire rispettivamente con x', y') sostituirle nell'equazione dell'ellisse $\gamma'=\tau(\gamma)$, quindi eliminare gli apici.

Da $\sigma_a:\begin{cases} x'=y-1 \\ y'=x+1 \end{cases}$ si ha $\begin{cases} y=x'+1 \\ x=y'-1 \end{cases}$,

quindi $\gamma''=\sigma_a(\gamma'): \frac{(y'-1-1)^2}{4}+(x'+1-1)^2=1$, da cui, eliminando gli apici e riordinando,

$$\gamma'': x^2+\frac{(y-2)^2}{4}=1$$

L'ellisse ottenuta ha come centro il punto $C_2(0;2)$, assi paralleli agli assi coordinati, uno coincidente con l'asse delle ordinate,l'altro con la retta y=2 e con i fuochi sull'asse y.

In Figura 2 sono riportate le tre ellissi γ, γ', γ'' e la retta *a*:x-y+1=0; si noti che γ'' passa per i punti P e Q in cui la retta *a* taglia l'ellisse γ' e ciò perché i punti di questa retta sono fissi nella simmetria assiale σ_a.

Verifica della coincidenza di γ'' con $(\sigma_a \circ \tau)(\gamma)$

Per effettuare la verifica richiesta si deve applicare direttamente la trasformazione composta $\sigma_a \circ \tau$ all'ellisse γ; per questo si ricavano le espressioni di x, y in funzione x'', y'' dalle equazioni della trasformazione (3.1) e si sostituiscono nell'equazione di γ, quindi si eliminano gli apici. Occorre verificare che si ottiene la stessa equazione γ''.

$$\sigma_a \circ \tau : \begin{cases} x'' = y \\ y'' = x + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x'' \\ x = y'' - 2 \end{cases}$$, da cui, essendo $\gamma : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

$(\sigma_a \circ \tau)(\gamma) : \frac{(y''-2)^2}{4} + x''^2 = 1$, quindi $(\sigma_a \circ \tau)(\gamma) : x^2 + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$ C.V.D.

6. La trasformazione $\tau \circ \sigma_a$ si ottiene applicando prima la simmetria assiale, quindi la traslazione. Proviamo che si ottiene la stessa glissosimmetria. Segue il diagramma di flusso delle operazioni.

$$P(x;y) \xrightarrow{\sigma_a} P'(x' = y - 1; y' = x + 1) \xrightarrow{\tau} P''(x'' = x' + 1; y'' = y' + 1) =$$
$$P''(x'' = y - 1 + 1; y'' = x + 1 + 1) = P''(x'' = y; y'' = x + 2)$$

Le equazioni ottenute per la trasformazione composta $\tau \circ \sigma_a$ indicano che essa opera esattamente come la trasformazione $\sigma_a \circ \tau$ e dunque la curva $(\tau \circ \sigma_a)(\gamma)$ coinciderà con la curva $\gamma'' = (\sigma_a \circ \tau)(\gamma)$. Evitiamo di riportare altre elaborazioni algebriche.

7. Segue la figura riepilogativa.

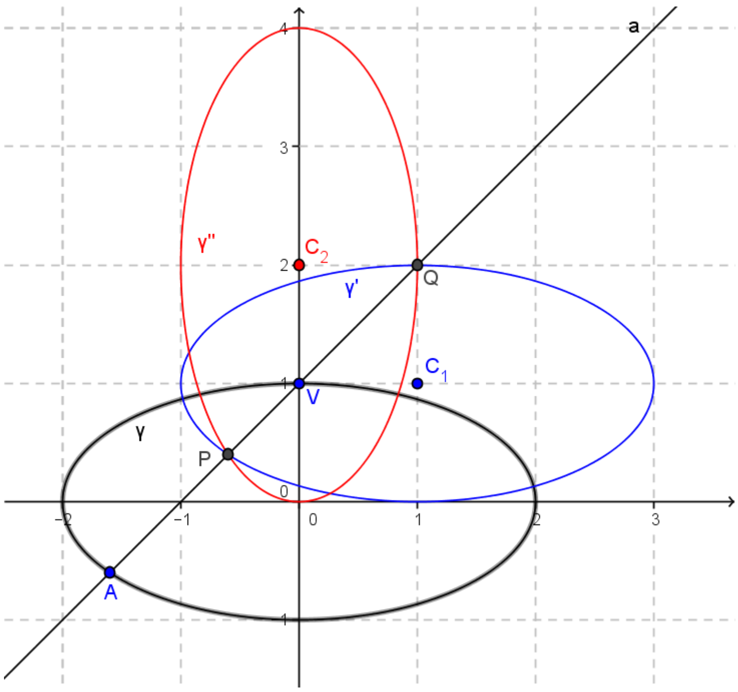

Figura 2