Geometria analitica della retta

Applicazione delle simmetrie centrale e assiale

Nel riferimento cartesiano ortogonale xOy si consideri il punto P(-2;-3) e la retta r:2x-3y+1=0

Quesiti

a) Determinare i simmetrici P_1, P_2, P_3 del punto P ordinatamente rispetto all'origine degli assi, alla bisettrice del secondo e quarto quadrante e alla retta r.
b) Determinare l'area del triangolo $P_1 P_2 P_3$.
c) Rappresentare gli elementi geometrici elaborati.

Elaborazioni

a) Il simmetrico del punto P(x;y) rispetto all'origine degli assi è il punto P′(x′;y′) tale che x′=y e y′=y. Nel caso in esame risulta P_1(-3;-2).

Il simmetrico del punto P(x;y) rispetto alla bisettrice del secondo e quarto quadrante è il punto P′′(x′′;y′′) tale che x′′=-y e y′′=-x. Pertanto si ha P_2(3;2).

Ricerca delle coordinate del punto P_3.

Poniamo $P_3(x_3;y_3)$.

Affinché P_3 sia simmetrico di P rispetto alla retta r deve verificare due condizioni: 1) che il punto medio del segmento PP_3 appartenga alla retta r; 2) che il segmento PP_3 sia perpendicolare ad r. Sviluppiamo le due condizioni.

1) Sia M il punto medio del segmento PP_3 ; risulta $M\left(\frac{x_3-2}{2};\frac{y_3-3}{2}\right)$ e dunque le sue coordinate devono verificare l'equazione della retta r. Deve sussistere la condizione

$2\cdot\frac{x_3-2}{2}-3\cdot\frac{y_3-3}{2}+1=0$, da cui $2x_3-3y_3+7=0$.

2) Il coefficiente angolare della retta r è $m(r)=\frac{2}{3}$ e quello della retta passante per P e P_3 è

$m'=\frac{y_3+3}{x_3+2}$. Per la perpendicolarità tra r e il segmento PP_3 si deve verificare la condizione

$m(r)\cdot m'==-1$, dunque $\frac{2}{3}\cdot\frac{y_3+3}{x_3+2}=-1$, da cui $3x_3+2y_3+12=0$.

Le coordinate del punto P_3 cercato sono le componenti della coppia soluzione del sistema formato con le due equazioni ottenute dalle due condizioni indicate.

$$\begin{cases} 2x_3 - 3y_3 + 7 = 0 \\ 3x_3 + 2y_3 + 12 = 0 \end{cases}$$ La soluzione del sistema è $\begin{cases} x_3 = -\dfrac{50}{13} \\ y_3 = -\dfrac{3}{13} \end{cases}$.

Il punto cercato è $P_3\left(-\dfrac{50}{13}; -\dfrac{3}{13}\right)$.

b) **Area del triangolo P₁ P₂ P₃.**

Calcoliamo il valore dell'area del triangolo utilizzando il **metodo del determinante del terzo ordine** avendo cura di comporre le righe dello stesso inserendo le coordinate dei vertici presi nel verso antiorario. Si ha:

$$Area\left(P_1P_3P_2\right) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -\dfrac{50}{13} & -\dfrac{3}{13} & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(\left(-\frac{6}{13}+9-\frac{100}{13}\right)-\left(-\frac{9}{13}+4-\frac{150}{13}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{159-106}{13}+5\right) = \frac{59}{13}$$

c) La figura con tutti gli elementi geometrici elaborati è riportata di seguito.