Sull'ellisse

Applicazione delle dilatazioni

Nel piano cartesiano *x*O*y* si consideri l'equazione parametrica

$E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3a^2} = 1$ e si risolvano i seguenti quesiti.

1) Determinare il valore a^2 per il quale l'equazione rappresenta un'ellisse γ avente inscritto il rettangolo ABCD, con A nel primo quadrante, B nel secondo, C nel terzo e tale che $AD = \sqrt{3}AB$ e l'area del rettangolo misuri $32\sqrt{3}$.
2) Determinare le coordinate dei vertici del rettangolo ABCD, i vertici dell'ellisse ed il valore dell'eccentricità.
3) Determinare le equazioni della dilatazione δ avente centro nell'origine degli assi che trasforma la circonferenza λ di raggio unitario e centro nell'origine O nell'ellisse γ. Riconoscere che la dilatazione δ trasforma la bisettrice del primo e terzo quadrante nella retta della diagonale AC e la bisettrice del secondo e quarto quadrante nella retta della diagonale BD.
4) Sfruttando le proprietà della trasformazione δ calcolare l'area del triangolo mistilineo OAB formato dall'unione del triangolo isoscele OAB con il segmento ellittico delimitato dalla corda AB e dal minore dei due archi dell'ellisse di estremi A, B.
5) Realizzare una figura riepilogativa contenente tutti gli elementi geometrici elaborati.

Soluzione

1) L'equazione con $a \neq 0$ rappresenta un'ellisse avente il centro nell'origine degli assi, il semiasse minore di misura a e quello maggiore di misura $a\sqrt{3}$; l'ellisse ha i fuochi sull'asse delle ordinate.

Sia A(*x*;*y*) il vertice del rettangolo inscritto situato nel primo quadrante; risulta *x*>0, *y*>0. Poiché l'ellisse è simmetrica rispetto all'origine O gli altri vertici del rettangolo sono B(-*x*;*y*), C(-*x*;-*y*), D(*x*;-*y*).

Le dimensioni del rettangolo sono: $\overline{AB} = |x_A - x_B| = 2x$, $\overline{AD} = |y_A - y_D| = 2y$ e dovendo essere soddisfatta la relazione $AD = \sqrt{3}AB$ si deduce che

$2y = \sqrt{3} \cdot 2x$, quindi $y = \sqrt{3}x$. (*)

L'area del rettangolo ABCD in funzione delle coordinate del vertici A vale $Area(ABCD) = 4xy$ e quindi deve sussistere anche la relazione

$4xy = 32\sqrt{3}$, da cui $xy = 8\sqrt{3}$ (**)

In definitiva le coordinate (*x*;*y*) di A devono verificare il sistema seguente

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{3a^2}=1 \\ y=\sqrt{3}x \\ xy=8\sqrt{3} \end{cases}$$ dal quale si deduce che $x=2\sqrt{2}$, $y=2\sqrt{6}$ e $a^2=16$;

l'ellisse cercata è $\gamma:\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{48}=1$.

2) I vertici del rettangolo sono: $A\left(2\sqrt{2};2\sqrt{6}\right)$, $B\left(-2\sqrt{2};2\sqrt{6}\right)$, $C\left(-2\sqrt{2};-2\sqrt{6}\right)$, $D\left(2\sqrt{2};-2\sqrt{6}\right)$.

I vertici dell'ellisse sono $V_1(4;0)$, $V_2(-4;0)$, $V_3\left(0;4\sqrt{3}\right)$, $V_4\left(0;-4\sqrt{3}\right)$. L'eccentricità dell'ellisse è il rapporto tra il semiasse maggiore e la semidistanza focale. Con ovvio significato dei simboli si ha:

$c^2=b^2-a^2=48-16=32$, da cui $c=4\sqrt{2}$; $e=\dfrac{c}{b}=\dfrac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

3) La **dilatazione** avente centro nell'origine O degli assi e parametri $k>0$, $h>0$ ha equazioni

$$\delta:\begin{cases} x'=kx \\ y'=hy \end{cases} \qquad (1)$$

La circonferenza λ di raggio unitario e centro nell'origine degli assi ha equazione

$$\lambda: x^2+y^2=1 \qquad (2)$$

Per ottenere l'equazione della curva $\delta(\lambda)$ trasformata della circonferenza dalla dilatazione è necessario ricavare dalle equazioni della dilatazione x, y in funzione di x', y' e sostituire le espressioni nell'equazione di λ, successivamente eliminare gli apici. Si ha

$x=\dfrac{x'}{k}$, $\qquad y=\dfrac{y'}{h}$, $\qquad$ quindi $\delta(\lambda):\left(\dfrac{x'}{k}\right)^2+\left(\dfrac{y'}{h}\right)^2=1$, da cui

$$\delta(\lambda):\frac{x^2}{k^2}+\frac{y^2}{h^2}=1 \qquad (3)$$

Dall'equazione (3) si ottiene l'equazione dell'ellisse $\gamma:\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{48}=1$ per $k^2=16$ e $h^2=48$, dunque per $k=4$ e $h=4\sqrt{3}$. La dilatazione richiesta è perciò: $\delta:\begin{cases} x'=4x \\ y'=4\sqrt{3}y \end{cases}$.

Trasformate delle bisettrici dei quadranti nella dilatazione δ

La bisettrice del primo e terzo quadrante $b_1 : y = x$ è trasformata nella retta

$$r_1 = \delta(b_1): \frac{y}{4\sqrt{3}} = \frac{x}{4}$$, da cui $r_1 =: y = \sqrt{3}x$.

La bisettrice del secondo e quarto quadrante $b_2 : y = -x$ è trasformata nella retta

$$r_2 = \delta(b_2): \frac{y}{4\sqrt{3}} = -\frac{x}{4}$$, da cui $r_2 =: y = -\sqrt{3}x$.

Si verifica immediatamente che r_1 contiene i vertici A e C ed r_2 i vertici B e D del rettangolo ABCD osservando che dette equazioni sono soddisfatte dalle coordinate dei rispettivi vertici.

$A\left(2\sqrt{2};2\sqrt{6}\right) \in r_1 =: y = \sqrt{3}x$ perché $2\sqrt{6} = \sqrt{3}\cdot 2\sqrt{2}$.

Analoghe verifiche sussistono per gli altri punti.

4) Per risolvere il quesito è necessario ricordare che una trasformazione τ del piano cartesiano in se stesso, definita dalle equazioni

$$\tau : \begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = cx + dy + q \end{cases} \qquad (4)$$

il cui determinante è $D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$, ha la proprietà di trasformare una figura piana F, avente area S, nella figura piana F′ avente area S′tale che il rapporto tra l’area della figura trasformata e l’area della figura di partenza è uguale costantemente al valore assoluto del determinante della trasformazione. Quindi

$$\frac{S'}{S} = |D|, \text{ da cui } S' = S \cdot |D| \qquad (5)$$

Ciò premesso , notiamo che:

a) la dilatazione δ in questione è una trasformazione del tipo (4); infatti si può scrivere

$$\delta : \begin{cases} x' = 4x + 0y \\ y' = 0x + 4\sqrt{3}y \end{cases}, \text{ con determinante } D = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4\sqrt{3} \end{vmatrix} = 16\sqrt{3};$$

b) il triangolo mistilineo OAB è il trasformato nella suddetta dilatazione del settore circolare di ampiezza 90° appartenente al cerchio delimitato dalla circonferenza λ e compreso tra le bisettrice del primo quadrante e la bisettrice del secondo quadrante. Infatti, nel precedente quesito n.3 abbiamo riconosciuto che la retta trasformata della bisettrice del primo e terzo quadrante è la retta contenente il segmento OA e che la trasformata delle bisettrice del secondo e quarto quadrante è la retta contenente il segmento OB. Inoltre sappiamo che la dilatazione δ trasforma la circonferenza λ nell'ellisse γ con il "processo di espansione" e conseguentemente trasforma il settore circolare richiamato sopra nel triangolo mistilineo OAB.

Calcolo dell'area del triangolo mistilineo OAB

L'area del settore circolare è la quarta parte dell'area del cerchio definito da λ, dunque

$$S = \frac{1}{4} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{4}$$

Dalla (5) deduciamo che l'area del S′ del triangolo mistilineo OAB vale

$$S' = S \cdot |D| = \frac{\pi}{4} \cdot 16\sqrt{3} = 4\pi\sqrt{3}$$

5) La figura contenente tutti gli elementi geometrici elaborati è riportata di seguito.