# Un prisma obliquo a base quadrata

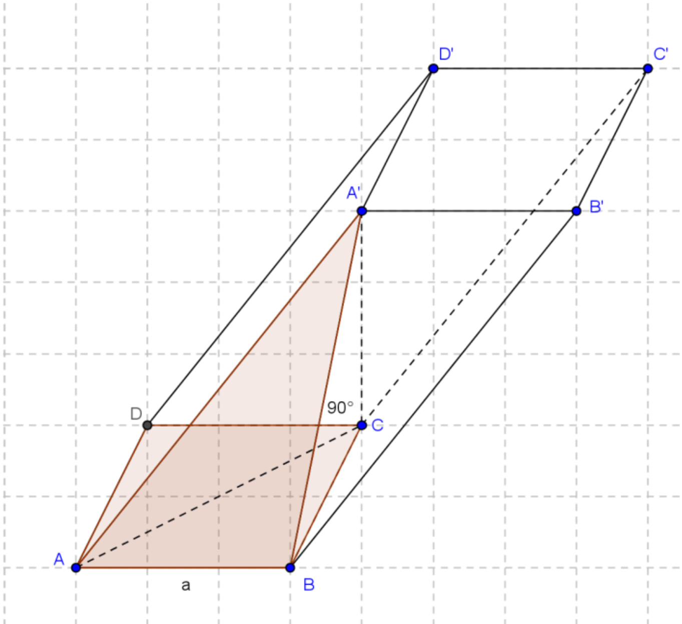
## Problema

Un prisma di base quadrata ABCD,avente il lato di misura *a*, è tale che la proiezione ortogonale dello spigolo AA' sul piano della base coincide con la diagonale AC e l'altezza A'C è congruente al lato di base. Determinare l'area della superficie laterale del prisma.

## Elaborazioni

Osserviamo subito che il prisma ha le quattro facce che sono tra loro congruenti, quindi per calcolare l'area della superficie laterale basta determinare l'area di una delle facce.

Facciamo riferimento alla figura riportata a lato.




1) Il triangolo ACA' è rettangolo con l'angolo retto in C perché A'C è perpendicolare al piano di base ABCD. E' noto che l'altezza del prisma (distanza tra le basi) ha la stessa misura del lato di base, dunque $\overline{A'C} = a$. Poiché $\overline{AC} = a\sqrt{2}$, applicando il teorema di Pitagora al triangolo ACA' si trova la misura dello spigolo AA'.
$\overline{AA'} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{A'C}^2} =$
$\sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 + a^2} = a\sqrt{3}$.
2) Consideriamo ora la faccia ABB'A'. La sua diagonale A'B la divide nei due triangoli congruenti ABA', BB'A'. Possiamo determinare la misura della diagonale BA' considerando il triangolo rettangolo BCA', isoscele su BA', dunque risulta $\overline{BA'} = a\sqrt{2}$. A questo punto si può determinare l'area del triangolo ABA' applicando la formula di Erone giacché si conoscono le misure dei tre lati.

Posto

$$2p = \overline{AB} + \overline{BA'} + \overline{AA'} = a + a\sqrt{2} + a\sqrt{3} = a\left(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$$

applicando la formula di Erone per l'area del triangolo ABA'si ha:

$$Area(ABA') = \sqrt{p\left(p - \overline{AB}\right)\left(p - \overline{BA'}\right)\left(p - \overline{AA'}\right)} =$$

$$\sqrt{\frac{a}{2}\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\frac{a+a\sqrt{2}+a\sqrt{3}}{2} - a\right)\left(\frac{a+a\sqrt{2}+a\sqrt{3}}{2} - a\sqrt{2}\right)\left(\frac{a+a\sqrt{2}+a\sqrt{3}}{2} - a\sqrt{3}\right)} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^4 \left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1\right)\left(1+\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)} =$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2\sqrt{\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+\left(\sqrt{2}-1\right)\right)\left(\sqrt{3}-\left(\sqrt{2}-1\right)\right)}=$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2\sqrt{\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2\right)\left(\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}-1\right)^2\right)}=\frac{a^2}{4}\sqrt{2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}}=\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$$

A questo punto possiamo affermare che l'area della faccia ABB'A' è $a^2\sqrt{2}$ e in definitiva che l'area della superficie laterale del prisma è

$$Area\left(S_l\right)=4\cdot Area\left(ABB'A'\right)=4a^2\sqrt{2}$$