Geometria Euclidea del piano

Un quadrato particolare interno ad un altro quadrato

Problema

In figura sono rappresentati il quadrato ABCD e il quadrilatero IJKL con quest'ultimo interno al primo. I vertici I, J, K, L sono così ottenuti:

I, si ottiene come intersezione della corda del quadrato ABCD avente per estremi il vertice A ed il punto medio F del lato BC con la corda avente come stremi il vertice D con il punto medio E del lato AB;

J, si ottiene come intersezione della corda AF con la corda BG, con G punto medio del lato CD;

K, si ottiene come intersezione della corda BG con la corda CH, con H punto medio del lato AD;

L, si ottiene come intersezione della corda CH con la corda DE.

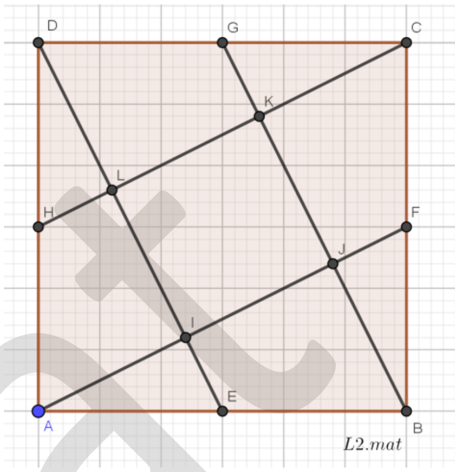

Figura 1

Tesi - Dimostrare che il quadrilatero IJKL è un quadrato e calcolare il rapporto tra la sua area e quella del quadrato ABCD. Risp. 1/5

Elaborazioni

1) Osserviamo che i triangoli ABF, BCG, CDH, DAE sono rettangoli ed hanno i cateti ordinatamente congruenti, quindi sono congruenti; da ciò emerge che sono tra loro congruenti gli angoli acuti BAF, CBG, DCH, ADE, nonché tra loro congruenti gli angoli AFB, BGC, CHD, DEA.
2) Il quadrilatero AFCH ha i lati opposti AH, CF che sono paralleli (appartengono a due lati opposti del quadrato ABCD) e congruenti, perciò è un parallelogramma. Con analoghe considerazioni si prova che è un parallelogramma anche il quadrilatero BGDE. Possiamo affermare che il quadrilatero **IJKL è un parallelogramma** perché ha i lati opposti paralleli. Nel punto successivo **proveremo che IJKL ha gli angoli interni retti**, quindi che si tratta di un rettangolo.
3) Osserviamo ora che l'angolo AEI è complementare dell'angolo ADE perché angoli acuti del triangolo rettangolo ADE e gli angoli ADE, EAI sono congruenti perché elementi omologhi dei triangoli rettangoli congruenti ABF, DAE, quindi l'angolo AEI è complementare dell'angolo EAI, dunque l'angolo $A\hat{I}E$ è retto. Con analogo ragionamento si prova che sono retti anche gli angoli IJK, JKL, KLI. Il quadrilatero **IJKL è dunque un rettangolo**.
4) Vogliamo ora provare che il rettangolo IJKL è un quadrato perché ha i lati congruenti.
    a. Considerando i triangoli rettangoli AEI, BFJ, CGK, DHL hanno le rispettive ipotenuse che sono congruenti perché ciascuna metà del lato del quadrato ABCD cui appartengono ed hanno gli angoli acuti ordinatamente congruenti; quindi, detti triangoli sono congruenti ed in particolare si deduce che sono congruenti i segmenti AI, BJ, CK, DL.

b. Osserviamo che sono congruenti tra loro i triangoli rettangoli ABJ, BCK, CDL, DAI perché le loro ipotenuse sono lati del quadrato ABCD ed hanno congruenti ordinatamente gli angoli acuti; deduciamo che sono congruenti i segmenti AJ, BK, CL, DI.

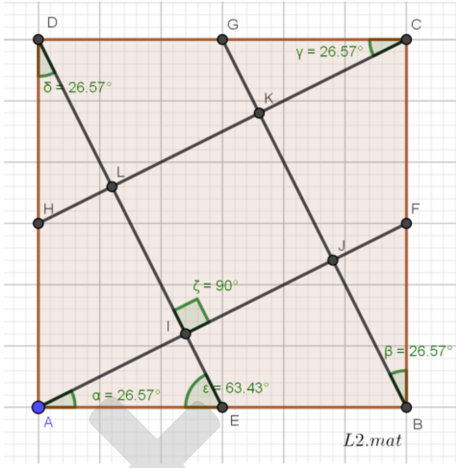

Figura 2

c. Ricordiamo, infine, che, come conseguenza del teorema di Talete, *la parallela condotta dal punto medio di un lato di un triangolo ad un altro lato interseca il terzo lato nel suo punto medio* (*e viceversa, la congiungente i punti medi di due lati di un triangolo è parallela al terzo lato e congruente alla sua metà*). Pertanto, in particolare, dall'essere AE≅ EB ed EI//BJ segue che AI≅ IJ e analogamente sussistono le congruenze BJ≅ JK, CK≅ KL, DL≅ LI. Infine, dalla congruenza dei triangoli AEI, BFJ, CGK, DHL, per confronto si deduce che sono congruenti i segmenti IJ, JK, KL, LI, dunque **il quadrilatero IJKL è un quadrato**.

5) Occupiamoci ora dell'area del quadrato IJKL.

a. Soffermiamoci sul triangolo rettangolo ABJ. La corda EI unisce i punti medi dei lati AB, AJ, quindi, oltre ad essere parallela alla base BJ(1) è anche congruente alla metà di essa. Il triangolo rettangolo ABJ ha i cateti AJ, BJ che sono doppi rispettivamente dei cateti AI, EI del triangolo rettangolo AEI; quindi, la sua area è il quadruplo dell'area del triangolo AEI.

b. Poniamo per semplicità la misura del lato IJ del quadrato IJKL uguale m. Notiamo che:

i. $\overline{AI} = \overline{IJ} = \overline{JK} = \overline{BJ} = m$. $\text{Area}(ABJ) = \overline{BJ} \cdot \overline{AJ} / 2 = m \cdot 2m / 2 = m^2$

ii. Il quadrato IJKL ha area $Area(IJKL) = \overline{IJ}^2 = m^2$

iii. La parte del quadrato ABCD esterna al quadrato IJKL è l'unione dei quattro triangoli rettangoli tra loro congruenti ABJ, BCK, CDL, DAI, ciascuno dei quali ha area m^2, quindi, l'area complessiva della regione piana formata dai suddetti quattro triangoli è $4m^2$. Da ciò segue che l'area del quadrato ABCD è $4m^2 + m^2 = 5m^2$, quindi il rapporto tra l'area del quadrato IJKL e l'area del quadrato ABCD è 1/5.

(1) Per la conseguenza del teorema di Talete richiamata nel precedente punto 4.c