Equiestensione delle figure piane

Equiestensione di due particolari triangoli

Problema (Livello di difficoltà 3/5)

Si consideri il parallelogramma ABCD. Sul prolungamento del lato DC, dalla parte di C, prendere un punto qualsiasi E, congiungerlo con i vertici A e B. Sia F il punto di intersezione di AE con il lato BC. Dimostrare che i triangoli DCF, BFE son equiestesi.

Elaborazioni

Premessa

La figura geometrica relativa ai dati presenti nel testo è in Figura 1.

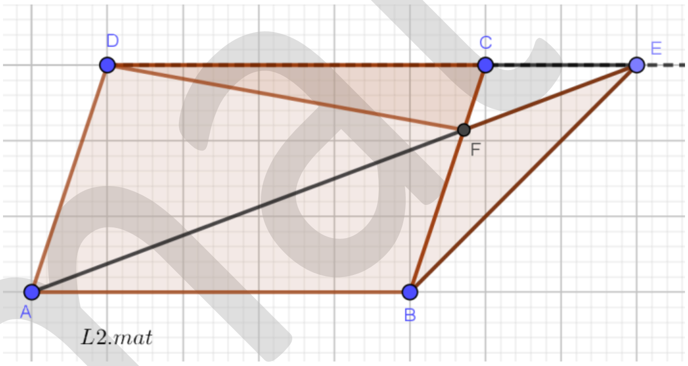

Figura 1

Per la dimostrazione della tesi del problema completiamo la Figura 1 come indicato in Figura 2 ottenuta dalla precedente conducendo da E la retta r parallela ad AD e tracciando la retta s del lato AB; ancora, sia G il punto $r \cap s$. Condurre infine per il punto F la retta t parallela ad s e indicare rispettivamente con H l'intersezione di t con il lato AD e con K l'intersezione di t con EG.

Strategia risolutiva

Nella dimostrazione che presenteremo svolge un ruolo importante una particolare proprietà dei parallelogrammi e precisamente quella di essere divisi da ogni diagonale in due triangoli congruenti.

Inoltre, utilizzeremo adeguatamente la proprietà dell'equiestensione delle figure piane secondo la quale, se due figure F_1 ed F_2 sono equiestese (simbolo $F_1 \doteq F_2$), sottraendo (o aggiungendo) ad entrambe altre due figure tra loro equiestese F'_1 ed F'_2 ($F'_1 \doteq F'_2$) risultano ancora equiestese le figure differenze F_1-F'_1 e F_2-F'_2.

In riferimento alla Figura 2 dimostreremo:

1. che sono equiestesi i parallelogrammi DCFH, BFKG;
2. che sono equiestesi i triangoli BFK, BFE.

Ciò fatto, seguirà immediatamente la tesi.

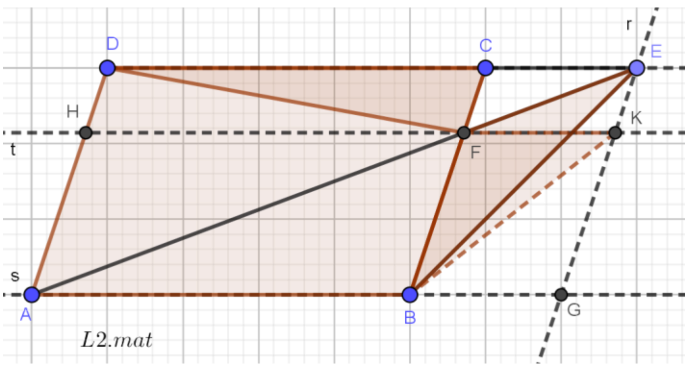

Figura 2

Dimostrazione

1. In Figura 2 sono presenti alcuni parallelogrammi. Osserviamo il parallelogramma ADEG. Esso è suddiviso dalla diagonale AE nei due triangoli congruenti ADE, AGE, i quali sono anche ovviamente equiestesi: ADE $\doteq$ AGE.

Il parallelogramma AHFB è suddiviso dalla diagonale AF nei due triangoli congruenti ed equiestesi AHF, ABF ed il parallelogramma FCEK è suddiviso dalla diagonale FE nei due triangoli congruenti ed equiestesi FCE, FKE. Deduciamo che **sono equiestese le figure ottenute dalle differenze** ADE – (AHF+FCE) = **DCFH**, AGE - (ABF+FKE)=**BFKG**. Osserviamo che i quadrilateri DCFH e BFKG, avendo i lati opposti paralleli sono dei parallelogrammi.

2. Il parallelogramma DCFH è suddiviso dalla diagonale DF nei due triangoli congruenti ed equiestesi DCF, DFH, quindi DCF=DCFH/2. Analogamente, il parallelogramma BFKG è suddiviso dalla diagonale BK nei due triangoli congruenti ed equiestesi BFK, BGK, dunque risulta BFK=BFKG/2. Per quanto visto nel precedente punto 1., DCFH $\doteq$ BFKG, si deduce che sono equiestesi anche i triangoli DCF, BFK.
3. Osserviamo ora i triangoli BFE e BFK. Essi hanno la stessa base BF e come altezza relativa la distanza tra le rette parallele BC, EG, perciò (per un noto teorema sui triangoli equiestesi) sono equiestesi: BFE $\doteq$ BFK. Per transitività concludiamo che DCF $\doteq$ BFK $\doteq$ BFE. C.V.D.