Geometria Euclidea del piano

Circonferenza inscritta e circonferenze centrate nei vertici di un triangolo

Problema

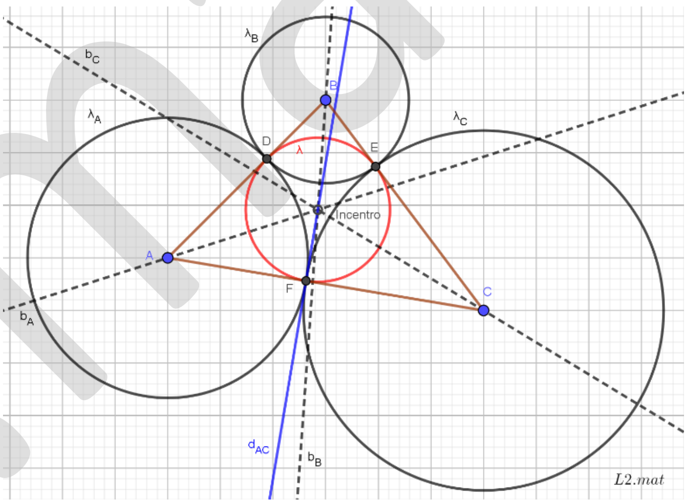
In un triangolo qualsiasi ABC, si consideri la circonferenza λ inscritta e le tre circonferenze ciascuna delle quali ha centro in un vertice del triangolo e passa per i punti di contatto che λ ha con i due lati del triangolo uscenti dallo stesso vertice. Dimostrare che le tre circonferenze aventi centro in un vertice sono tra loro tangenti a due a due.

Elaborazioni

Facciamo rifermento alla figura riportata.

Ricordiamo che in ogni triangolo ABC l'**incentro** è il **punto di incontro delle tre bisettrici** ed è sempre un punto interno al triangolo. L'incentro gode della **proprietà** di **essere equidistante dai lati del triangolo**.

Detto **I** l'incentro, la proprietà richiamata consente di tracciare la circonferenza λ avente come centro l'incentro del triangolo e che risulta tangente ai tre lati, nota come **circonferenza inscritta al triangolo**.



1) Possiamo determinare i punti di contatto della circonferenza inscritta con i rispettivi lati del triangolo conducendo le rette perpendicolari ai lati dall'incentro I. Le intersezioni di dette rette con i lati sono i punti di contatto. Denominiamo i punti di contatto: D sul lato AB, E sul lato BC, F sul lato AC.
2) Per tracciare la circonferenza inscritta al triangolo ABC puntare il compasso nell'incentro e definire come raggio uno dei segmenti ID, IE, IF.
3) Tracciamo ora la circonferenza λ_A di centro A e raggio AD, la circonferenza λ_B di centro B e raggio BE, la circonferenza λ_C di centro C e raggio CF. Occorre dimostrare che le circonferenze λ_A, λ_B sono tangenti in D, che le circonferenze λ_B, λ_C sono tangenti in E, che le circonferenze λ_C, λ_A sono tangenti in F.
4) Per le circonferenze λ_A, λ_B osserviamo che i loro centri appartengono alla retta del lato AB ed entrambe passano per il punto D. La tangente alla circonferenza λ_A è la retta passante per D perpendicolare al lato AB; analogamente, la tangente alla circonferenza λ_B in D è ancora la retta passante per D[(1)]. Si deduce che **le due circonferenze λ_A, λ_B hanno nel punto D la stessa retta tangente** e ciò permette di affermare, per **definizione di curve tangenti in un punto**, che le due circonferenze in oggetto sono tangenti.

[(1)] Si ricordi che in un piano la retta perpendicolare ad una retta s condotta per un punto P qualsiasi del piano è unica.

5) Considerando le coppie di circonferenze $\lambda_{B,} \lambda_C$ e $\lambda_{A,} \lambda_C$, con ragionamenti analoghi a quello sviluppato nel precedente punto 4) si conclude che dette coppie di circonferenze sono tangenti rispettivamente nei punti E, F.