Circonferenza

Circonferenze secanti e angoli alla circonferenza

Problema

Siano λ_1 e λ_2 due circonferenze congruenti di centri rispettivamente O_1, O_2 e tali che l'una passi per il centro dell'altra; siano A e B i due punti di intersezione delle due circonferenze. Considerare una qualsiasi retta s passante per A secante entrambe le circonferenze e siano C e D gli ulteriori punti in cui s taglia rispettivamente λ_1 e λ_2.

1. Dimostrare che il quadrilatero convesso O_1AO_2B è un rombo con gli angoli adiacenti a ciascun lato uno doppio dell'altro.
2. Dimostrare che il triangolo BCD è equilatero.

Elaborazioni

Facciamo rifermento alla Figura 1 riportata a margine.

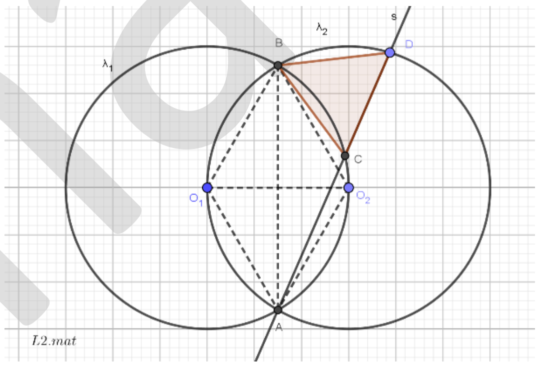

Figura 1

1. Osserviamo che i segmenti O_1A, A O_2, O_2B, O_1B, O_1O_2, sono raggi delle due circonferenze, che per ipotesi sono congruenti, quindi sono tra loro congruenti e i triangoli O_1O_2A, O_1O_2B sono equilateri, dunque ciascuno dei loro angoli interni misura 60°. Il quadrilatero O_1AO_2B è equilatero e poiché la retta dei centri di due circonferenze secanti è perpendicolare alla retta secante comune AB (questa retta è l'asse radicale delle due circonferenze), si deduce che il quadrilatero O_1AO_2B è un rombo. Gli angoli del rombo nei vertici A e B misurano 60° e quelli nei vertici O_1, O_2 misurano 120°, quindi gli angoli adiacenti a ciascun lato del rombo sono uno doppio dell'altro. C.V.D.
2. Consideriamo ora il triangolo BCD; dobbiamo provare che è equilatero. Facciamo riferimento alla Figura 2.

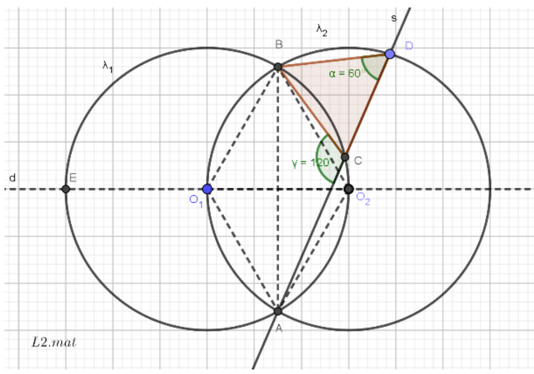

Figura 2

   a. Osserviamo che l'angolo alla circonferenza ADB nella circonferenza λ_2, che insiste sull'arco AO_1B, ha come corrispondente angolo al centro l'angolo AO_2B che misura 120°, quindi, poiché ogni angolo alla circonferenza ha ampiezza metà del corrispondente angolo al centro si conclude che ADB misura 60°.

   b. Consideriamo ora l'angolo ACB, esterno del triangolo BCD relativo al vertice C.
   Osserviamo che esso è anche angolo alla circonferenza di vertice C nella circonferenza λ_1 che insiste sull'arco AEB. Anche l'angolo AO_2B del rombo è angolo alla circonferenza di λ_1 che insiste sullo stesso arco AEB e sappiamo che esso ha ampiezza 120°. Da queste

considerazioni deduciamo che l'angolo ACB è congruente all'angolo AO_2B e quindi misura 120°. Da ciò segue che l'angolo interno BCD del triangolo in esame, che è adiacente all'angolo ACB, misura 60°. A questo punto sappiamo che il triangolo BCD ha i due angoli interni nei vertici C e D che misurano ciascuno 60°, perciò anche il terzo angolo CBD misura di 60°. In conclusione, il triangolo BCD, essendo equiangolo, è anche equilatero. C.V.D.