Geometria Euclidea del piano

Due circonferenze tangenti esternamente ed una retta secante

Problema

Siano λ_1 e λ_2 due circonferenze tangenti esternamente nel punto T. Considerare una qualsiasi retta s passante per T secante entrambe le circonferenze e siano A e B gli ulteriori punti in cui s taglia rispettivamente λ_1 e λ_2. Dimostrare che la retta tangente in A a λ_1 è parallela alla retta tangente in B a λ_2.

Elaborazioni

Dimostrazione

Facciamo riferimento alla Figura 1.

Ipotesi: 1) λ_1, λ_2, circonferenze tangenti esternamente in T ed aventi centri rispettivamente in O_1 e O_2.

2) s retta per T e secante λ_1, λ_2, rispettivamente in A e B.

3) t_A retta tangente λ_1 in A; t_B retta tangente λ_2 in B

Tesi: t_A // t_B

***

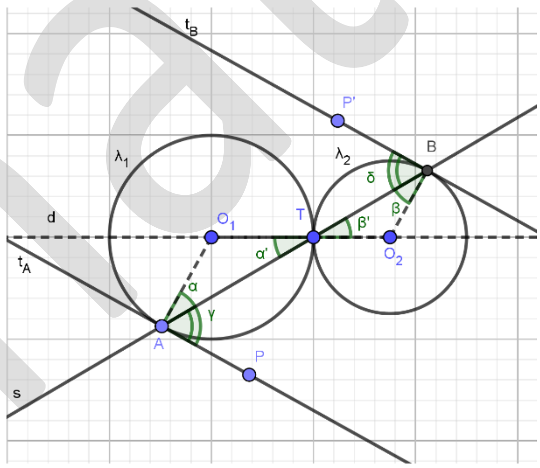

Figura 1

Osservazione preliminare

La retta secante s passante per il punto di contatto T delle due circonferenze rappresentata in Figura 1 potrebbe assumere due posizioni particolari:

a) coincidere con la retta dei centri delle due circonferenze;
b) coincidere con la tangente comune alle due circonferenze nel punto T.

Le considerazioni relative a questi due casi particolari saranno sviluppate più avanti.

***

In Figura 5 oltre alla retta secante *s* ad entrambe le circonferenze e alle due rette tangenti è stata tracciata la retta *d* che congiunge i centri delle due circonferenze, nonché i due raggi O_1A, O_2B.

Osserviamo che:

a) i due angoli O_1TA, O_2TB sono opposti al vertice, quindi sono congruenti;
b) i triangoli O_1AT, O_2BT sono isosceli rispettivamente su AT e BT, quindi sono congruenti gli angoli O_1AT, O_1TA, O_2TB, O_2BT.
c) Il raggio O_1A è perpendicolare alla tangente t_A, come pure il raggio O_2B è perpendicolare alla tangente t_B; da ciò discende che gli angoli $\gamma = \widehat{PAB}$, $\delta = \widehat{P'BA}$ sono tra loro congruenti perché complementari di angoli congruenti.

d) Poiché i due angoli PAB, $P'BA$ costituiscono una coppia di angoli alterni interni rispetto alle rette t_A, t_B tagliate dalla trasversale AB, per il criterio sul parallelismo si conclude che $t_A // t_B$. C.V.D.

Posizioni particolari della retta s

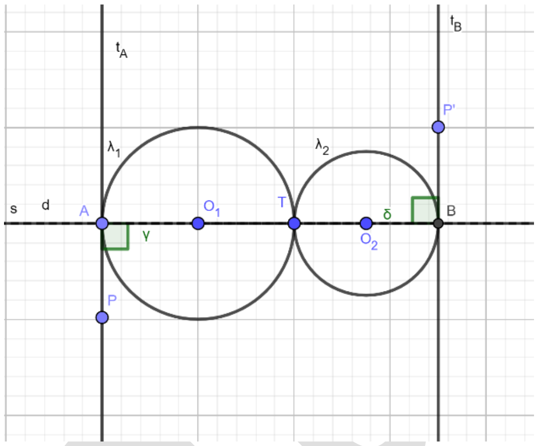

Figura 2

a) Se la retta s coincide con la retta dei centri delle due circonferenze, allora i punti A e B sono rispettivamente A, un estremo del diametro AT di λ_1, B un estremo del diametro TB di λ_2. In questo caso la tangente in A a λ_1 e la tangente in B a λ_2 sono perpendicolari alla stessa retta AB[(1)] e perciò sono ancora parallele tra loro. In Figura 2 è rappresentata la corrispondente configurazione geometrica.

b) Se la retta s coincide con la tangente comune alle due circonferenze nel punto T allora per definizione la retta s non è più secante a nessuna delle due circonferenze. Tuttavia, supponendo che per tracciare la secante s sia stato preso il punto A distinto da T su λ_1 e si sia tracciata la retta s passante per A e T, una volta determinato il secondo punto comune B di s con λ_2, si può immaginare cosa succede dinamicamente di B allorché il punto A tende a sovrapporsi al punto T. Ebbene, anche il punto B tenderà a coincidere con T. I tre punti A, T, B "al limite" coincideranno con lo stesso punto T, che nella dinamica rotante della retta rimane fisso. L'evoluzione dinamica della posizione dei due punti A e B implica che anche le rette tangenti alle due circonferenze in A e B tenderanno a coincidere proprio con la retta tangente comune alle due circonferenze in T. Questa retta per T è comunque perpendicolare alla retta *d* dei centri delle due circonferenze. In Figura 3 è rappresentata la configurazione geometrica a conclusione del movimento descritto. Il punto B è stato automaticamente nascosto dall'applicazione geometrica.

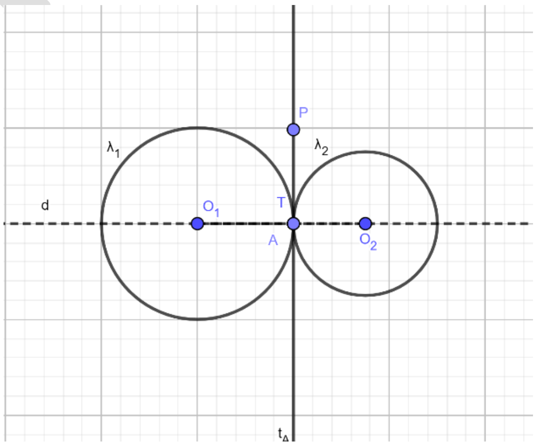

Figura 3

Cosa si può concludere circa il parallelismo delle due rette tangenti t_A, t_B ?

Ricordiamo che in un'interpretazione più generale della geometria, due rette dello stesso piano si dicono parallele quando hanno la stessa direzione e se due rette cono coincidenti hanno ovviamente la stessa direzione. Quindi, il caso di due rette coincidenti è un particolare caso di parallelismo tra rette.

Le considerazioni particolari sviluppate in questo punto certamente non le avremmo fatte se nel testo del problema si fosse precisato che la retta s doveva essere secante entrambe le circonferenze, ciascuna in due punti distinti.

[(1)] Infatti, in Figura 2, dov'è rappresentata la corrispondente situazione geometrica, i due angoli $\gamma = PAB$, $\delta = P'BA$, sono indicati chiaramente con il classico simbolo dell'angolo retto.

In realtà, a livello elementare, una retta è ritenuta secante ad una circonferenza se ha in comune con questo due punti distinti. È anche vero, però, che "**la posizione della retta tangente ad una circonferenza viene spesso presentata come la posizione limite alla quale tende una retta secante la curva quando allontanando la retta dal centro della circonferenza le si fa assumere la posizione in cui i due punti di intersezione che ha con la circonferenza non si sovrappongono**".