

Problemi sui triangoli

Triangolo rettangolo. Triangolo isoscele e parallelismo

Problema_1

Si consideri il triangolo ABC rettangolo in A e sia AH l'altezza relativa all'ipotenusa. Tracciare la bisettrice AD dell'angolo BAH. Dimostrare che il triangolo ADC è isoscele.

Dimostrazione

Faremo vedere che il triangolo ADC è isoscele su AD perché ha congruenti gli angoli adiacenti al suddetto lato.

- 1) Indichiamo con γ l'ampiezza dell'angolo ACB. Notiamo che l'angolo BAH è congruente all'angolo ACB perché entrambi complementari dell'angolo CAH. Poiché la bisettrice AD divide l'angolo BAH in due parti uguali deduciamo che l'ampiezza dell'angolo DAH è $\gamma/2$.

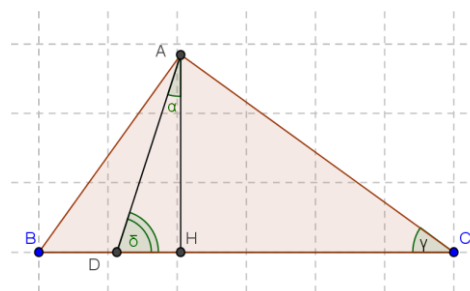
- 2) L'angolo CAH ha ampiezza $90^\circ - \gamma$ e dunque l'angolo CAD ha ampiezza $90^\circ - \gamma + \gamma/2 = 90^\circ - \gamma/2$.

- 3) Ricordato che la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto, in riferimento al triangolo ACD l'ampiezza δ dell'angolo ADC si ottiene per differenza:

$$ADC = 180^\circ - (ACD + DAC) \text{ da cui } \delta = 180^\circ - (\gamma + 90^\circ - \gamma/2) = 90^\circ - \gamma/2.$$

Conclusioni

I due angoli CAD, ADC hanno la stessa ampiezza, quindi il triangolo ADC è isoscele su AD.



Problema_2

Sia ABC un triangolo isoscele sulla base AB ed r una retta parallela al lato AB che intersechi rispettivamente in P e Q i lati AC, BC. Tracciare da P la retta t parallela al lato BC e da Q la retta t' parallela al lato AC; sia R il punto di intersezione di t e t' .

Dimostrare che sono isosceli i due triangoli PQC, PQR e che CR è bisettrice dell'angolo ACB.

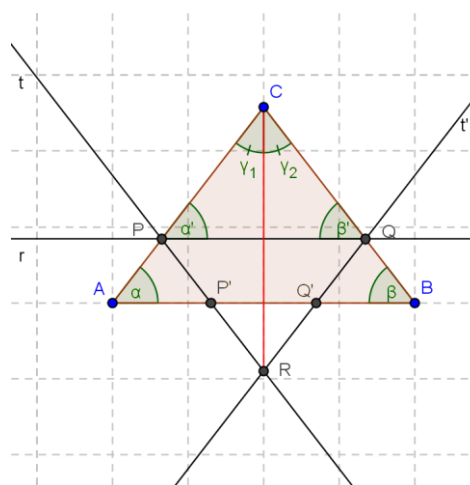
Dimostrazioni

- 1) **Dimostriamo che è isoscele il triangolo PQC.**
Osserviamo che gli angoli CPQ, CAB sono una coppia di angoli corrispondenti formati dalle rette parallele r e AB, tagliate dalla retta del lato AC, dunque sono congruenti tra loro; analogamente sono congruenti tra loro per lo stesso motivo gli angoli CQP, CBA, formati dalle stesse parallele tagliate dalla retta del lato BC. Poiché sono congruenti gli angoli CAB, CBA, perché angoli alla base del triangolo isoscele ABC, segue per transitività la congruenza tra gli angoli CPQ, CQP. Il triangolo PQC è isoscele sulla base PQ per avere congruenti gli angoli adiacenti al suddetto lato.

- 2) **Dimostriamo che è isoscele il triangolo PQR.**

In figura sono indicate con P' e Q' rispettivamente le intersezioni delle rette t , t' con la base AB. Osserviamo che l'angolo $AP'P$ è congruente all'angolo ABC perché coppia di angoli corrispondenti formati dalle rette parallele t e BC tagliate da AB; risultano anche congruenti gli angoli $AP'P$, $P'PQ$ perché coppia di angoli alterni interni formati dalle rette parallele r , AB tagliate dalla retta t , quindi, per transitività, sono congruenti gli angoli $P'PQ$, ABC.

Con ragionamento analogo si riconosce che sono congruenti gli angoli $Q'QP$, BAC e poiché sono congruenti gli angoli BAC, ABC, come angoli alla base del triangolo isoscele ABC, si



conclude che sono congruenti per transitività gli angoli $\angle P'PQ$, $\angle Q'QP$, dunque il triangolo PQR è isoscele su PQ .

3) **Dimostriamo che il segmento CR si trova sulla bisettrice dell'angolo ACB .**

Avendo dimostrato che il triangolo PQC è isoscele su PQ possiamo affermare che $PC \cong QC$; inoltre, dall'essere isoscele il triangolo PQR su PQ si deduce che $PR \cong QR$. Ebbene, confrontando i due triangoli CPR , CQR , si riconosce che essi sono congruenti per il terzo criterio perché hanno ordinatamente congruenti i tre lati (CR è lato comune) e da ciò segue che sono congruenti in particolare gli angoli omologhi $\angle RCP$, $\angle RCQ$, per cui il segmento CR divide l'angolo ACB in due parti uguali, dunque giace sulla bisettrice dello stesso angolo.
C.V.D.