

Problemi sui triangoli

Primo criterio di congruenza e secondo teorema dell'angolo esterno

Problema_1

Dato il triangolo ABC, si traccino l'altezza CH e la mediana CM, quindi si prolunghino CH del segmento HD congruente a CH e CM del segmento ME congruente a CM. Congiungere A con D ed M con E.

Dimostrare che sono congruenti gli angoli DAH, ABE e i segmenti AD e BE.

Risoluzione

- 1) Osserviamo che i due triangoli rettangoli AHC, AHD hanno in comune il cateto AH e congruenti per ipotesi i cateti CH, HD. Poiché gli angoli compresi tra detti lati sono retti, i due triangoli sono congruenti per il primo criterio.

Dalla congruenza acquisita si deduce che sono congruenti gli angoli DAH, CAH perché opposti ad elementi congruenti e risultano anche congruenti i lati AC, AD.

- 2) Consideriamo i triangoli AMC, BMC ed osserviamo che hanno $AM \cong MB$, perché M è punto medio di AB e per ipotesi $CM \cong ME$; inoltre sono congruenti gli angoli AMC, BME perché opposti al vertice. Deduciamo che i triangoli in oggetto sono congruenti per il primo criterio ed in particolare risultano congruenti gli angoli CAM, MBE ed i lati AC, BE come elementi omologhi.

Conclusioni

Dalle precedenti dimostrazioni, per transitività, risultano congruenti gli angoli DAH e ABE, perché entrambi congruenti all'angolo CAM; ancora per transitività sono congruenti i segmenti AD, BE perché entrambi congruenti ad AC.

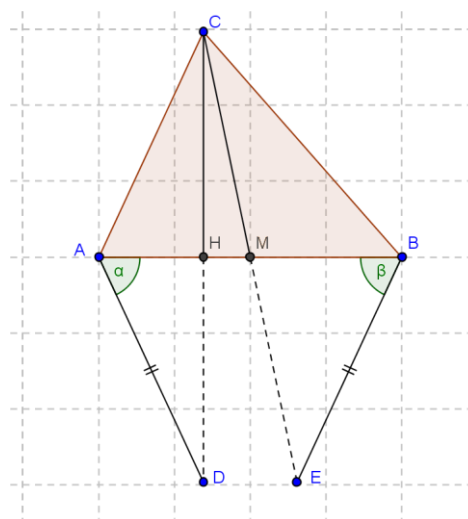


Figura 1

Problema_2

Sia ABC un triangolo isoscele sulla base AB. Si prolunghi il lato BC del segmento CD congruente a BC e si unisca il punto D con A. Dimostrare che l'angolo BAD è retto.

Risoluzione

- 1) Osserviamo che il triangolo ACD è isoscele su AD perché per ipotesi $AC \cong BC$ in quanto ABC è isoscele su AB e risulta ancora per ipotesi $CD \cong BC$, dunque per transitività $AC \cong CD$, pertanto i due angoli alla base CAD, ADC sono congruenti: sia δ la loro ampiezza.
- 2) Ricordiamo che in un triangolo la somma degli angoli interni misura 180° , quindi, in riferimento alla Figura 2, risulta $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, con $\alpha = \beta$, perché il triangolo ABC è isoscele sulla base AB; osserviamo ora che l'angolo ACB è angolo esterno del triangolo ACD e per il **secondo teorema dell'angolo esterno** è

congruente alla somma dei due angoli interni non adiacenti. In relazione alla figura, per quanto dimostrato nel precedente punto, possiamo scrivere $\gamma = 2\delta$.

Mettendo insieme le due uguaglianze $\gamma = 2\delta$, $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ e scrivendo quest'ultima nella forma $2\alpha + \gamma = 180^\circ$, deduciamo l'uguaglianza $2\alpha + 2\delta = 180^\circ$, da cui $\alpha + \delta = 90^\circ$, cioè, i due angoli BAC, CAD sono complementari, quindi l'angolo BAD è retto. C.V.D.

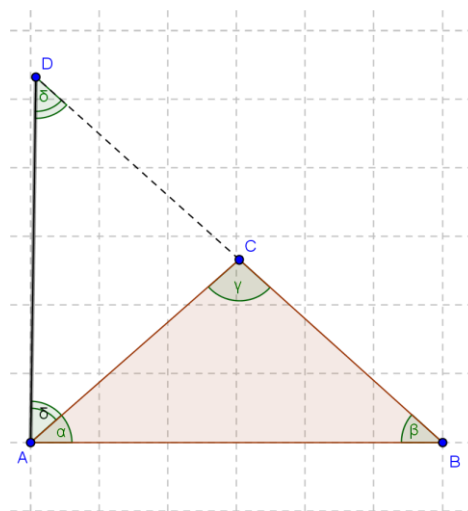


Figura 2