

Equiestensione di triangoli

Applicazione delle proprietà del parallelogramma

Problema

Considerato il parallelogramma ABCD, sia P un punto qualsiasi del parallelogramma interno al triangolo ACD. Unito P con i vertici A,B,C,D, dimostrare che il triangolo PAC è equiesteso alla differenza fra i triangoli PAB, PAD.

Soluzione

Premessa

Del problema proposto forniremo due dimostrazioni.

Prima dimostrazione⁽¹⁾

Facciamo riferimento alla Figura 1.

Ricordiamo che ogni parallelogramma è diviso da ciascuna sua diagonale in due triangoli congruenti. In Figura 1 è stata tracciata la diagonale AC; i triangoli ABC, ACD sono congruenti e ciascuno è equiesteso alla metà del parallelogramma ABCD.

La tesi del problema consiste nel provare che sussiste la seguente equivalenza

$$PAC \doteq PAB - PAD$$

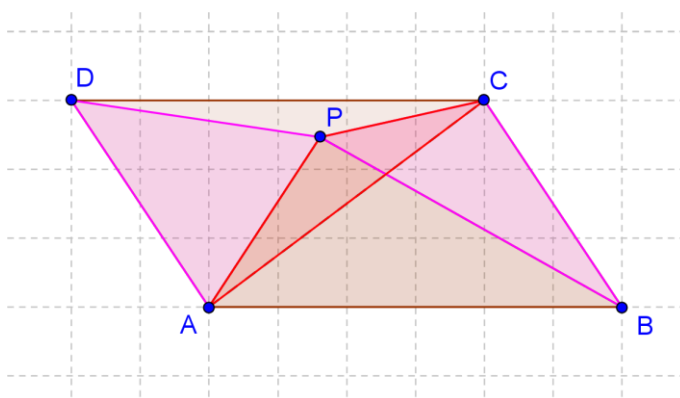


Figura 1

Osserviamo che unendo P con i vertici del parallelogramma quest'ultimo rimane decomposto nei quattro triangoli PAB, PBC, PCD, PAD e si può provare (abbastanza agevolmente) che l'unione dei due triangoli PAB, PCD forma una figura equiestesa a metà del parallelogramma ABCD; analogamente l'unione dei due triangoli PBC, PAD forma una figura equiestesa a metà del parallelogramma ABCD. Esprimiamo dette proprietà scrivendo

$$PAB + PCD \doteq \frac{1}{2}(ABCD) \quad (1)$$

$$PAD + PBC \doteq \frac{1}{2}(ABCD) \quad (2)$$

In particolare, avendo prima precisato che ciascuno dei triangoli ABC, ACD è equiesteso alla metà del parallelogramma ABCD possiamo anche scrivere

⁽¹⁾ Dimostrazione della Prof.ssa A.M. Abatianni

$$PAB + PCD \doteq \frac{1}{2}(ABCD) \doteq ADC \quad (3)$$

Dall'esame della figura si evince che

$$PAC \doteq ADC - (PAD + PCD) = ADC - PAD - PCD \quad (4)$$

Dalla (3) si ricava

$$PCD \doteq ADC - PAB \quad (3.1)$$

e sostituendo nella (4) si ricava

$$PAC \doteq ADC - PAD - (ADC - PAB) \doteq \cancel{ADC} - PAD - \cancel{ADC} + PAB \doteq PAB - PAD$$

La tesi è così dimostrata.

Seconda dimostrazione

Facciamo riferimento alla Figura 2.

Strategia risolutiva

Questa dimostrazione sfrutta la formula per il calcolo dell'area di un triangolo.

Considereremo i tre triangoli PAB, PAD, PAC, tutti sulla base PA e determineremo le rispettive altezze. Successivamente proveremo che l'area del triangolo PAB supera quella del triangolo PAD esattamente dell'area del triangolo PAC.

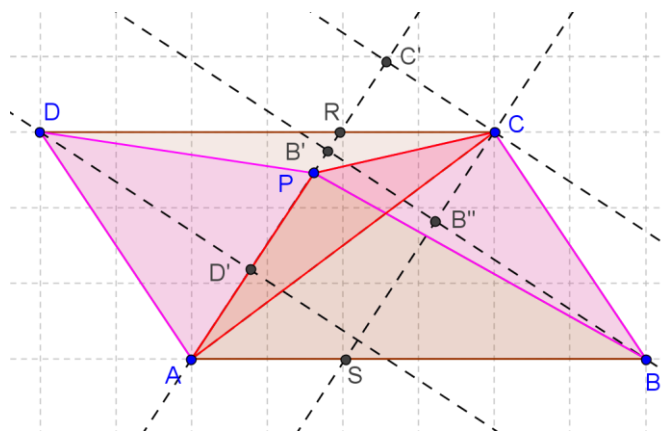


Figura 2

Elaborazioni

Tracciamo la retta contenente il segmento PA e sia R il punto in cui taglia il lato CD del parallelogramma. Analogamente, tracciamo la retta per C parallela a PA e sia S il punto di intersezione con il lato AB. Tracciamo, infine, dai vertici B, C, D le rette perpendicolari alla retta della base AP e siano BB', DD', CC' rispettivamente le altezze dei triangoli PAB, PAD, PAC relative alla base PA.

- 1) Notiamo che il quadrilatero ASCR è un parallelogramma ed in particolare che $AR \cong SC$.
- 2) I due triangoli ARD, CSB sono congruenti per il secondo criterio. Infatti, oltre ad avere $AR \cong SC$, possiamo notare che l'angolo ARD è alterno interno con l'angolo RAS , rispetto alle parallele CD, AB tagliate da RA, quindi i due angoli sono congruenti; inoltre l'angolo RAS è corrispondente con l'angolo BSC rispetto alle parallele RA, CS tagliate da AB, quindi risulta anche $RAS \cong BSC$. Per transitività si ricava $ARD \cong BSC$.

A questo punto osserviamo $RCS \cong BSC$ e poiché in un parallelogramma gli angoli opposti sono congruenti, e dunque che $BCD \cong BAD$, per differenze di angoli congruenti risulta

$$DAR = BAD - BAR \cong BCD - RCS = BCS$$

I due triangoli hanno dunque ordinatamente congruente un lato e i due angoli che lo comprendono e quindi sono congruenti per il secondo criterio di congruenza dei triangoli; ciò implica che le altezze relative ai lati AR e CS sono congruenti, dunque $DD' \cong BB''$ (vedere la Figura 2).

Confronto delle aree dei triangoli PAB, PAD, PAC

Ricordando che l'area di un triangolo è uguale al semiprodotto della misura di un lato per la misura dell'altezza corrispondente si ha:

$$\text{Area}(PAD) = \frac{1}{2} \overline{PA} \cdot \overline{DD'};$$

$$\text{Area}(PAB) = \frac{1}{2} \overline{PA} \cdot \overline{BB'};$$

$$\text{Area}(PAC) = \frac{1}{2} \overline{PA} \cdot \overline{CC'};$$

ma $\overline{CC'} = \overline{B''B'}$ e quindi $\overline{BB'} = \overline{BB''} + \overline{B''B'} = \overline{BB''} + \overline{CC'}$. In definitiva si ha

$$\begin{aligned} \text{Area}(PAB) &= \frac{1}{2} \overline{PA} \cdot \overline{BB'} = \frac{1}{2} \overline{PA} \cdot (\overline{BB''} + \overline{CC'}) = \frac{1}{2} \overline{PA} \cdot \overline{BB''} + \frac{1}{2} \overline{PA} \cdot \overline{CC'} = \\ &= \frac{1}{2} \overline{PA} \cdot \overline{DD'} + \frac{1}{2} \overline{PA} \cdot \overline{CC'} = \text{Area}(PAD) + \text{Area}(PAC) \end{aligned}$$

e quindi sussiste l'uguaglianza numerica $\text{Area}(PAB) - \text{Area}(PAD) = \text{Area}(PAC)$ che è una forma diversa della tesi. C.V.D.