

Triangolo rettangolo, circonferenza, quadrilatero inscritto

Problema

Nel triangolo ABC, rettangolo in A, le misure del cateto AB e della sua proiezione BH sull'ipotenusa sono rispettivamente 6cm e 2cm. Risolvere i quesiti che seguono.

- 1) Determinare la misura dell'ipotenusa BC e dell'altezza AH.
- 2) Calcolare perimetro ed area del triangolo ABC.
- 3) Considerata la circonferenza di diametro BC, circoscritta al triangolo, sia D il punto medio dell'arco minore fra i due archi di estremi A e C. Calcolare area e perimetro del quadrilatero ABCD.

Soluzione

- 1) La misura dell'ipotenusa BC si determina applicando il primo teorema di Euclide al triangolo ABC, mentre la misura dell'altezza AH si può determinare applicando il teorema di Pitagora al triangolo AHB. Si ha:

$$\overline{BC} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BH}} = \frac{36\text{cm}^2}{2\text{cm}} = 18\text{cm};$$

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BH}^2} = \sqrt{36 - 4}\text{cm} = 4\sqrt{2}\text{cm}$$

- 2) Occorre trovare la misura del cateto AC che determiniamo applicando il teorema di Pitagora al triangolo ABC.

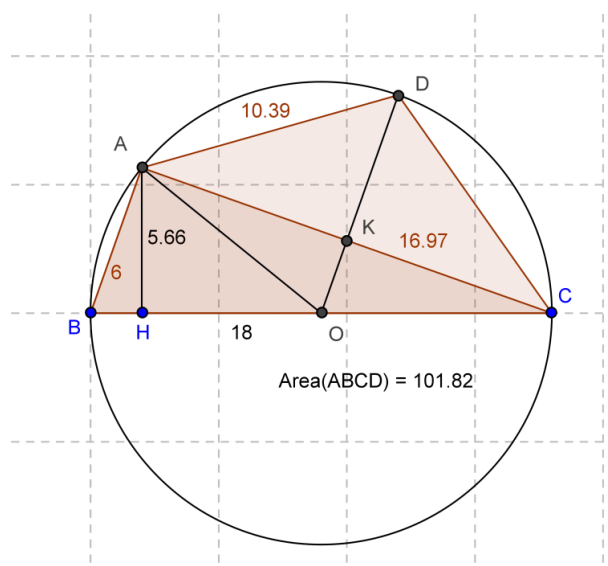
$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{18^2 - 6^2}\text{cm} = \sqrt{288}\text{cm} = 12\sqrt{2}\text{cm}$$

$$\text{Perimetro}(ABC) = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = (6 + 18 + 12\sqrt{2})\text{cm} = 12(2 + \sqrt{2})\text{cm}$$

$$\text{Area}(ABC) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{2} = \frac{6 \cdot 12\sqrt{2}}{2}\text{cm}^2 = 36\sqrt{2}\text{cm}^2$$

- 3) La circonferenza circoscritta al triangolo ABC ha come diametro l'ipotenusa BC; sia O il suo centro. Per ottenere il punto medio D dell'arco AC indicato nel testo basta condurre dal punto O la perpendicolare alla corda AC; la suddetta perpendicolare risulta anche asse di AC, dunque il punto K di intersezione con AC è anche punto medio di AC per cui

$$\overline{AK} = \frac{1}{2}\overline{AC} = 6\sqrt{2}\text{cm}$$



Osserviamo ora che $\overline{OK} = \overline{AB}/2 = 3cm$ perché O e K sono i punti medi dei dati BC, AC (conseguenza del teorema di Talete); la misura di DK si ottiene come differenza tra quella del raggio OD e quella del segmento OK:

$$\overline{KD} = \overline{OD} - \overline{OK} = \frac{\overline{BC}}{2} - \overline{OK} = (9 - 3)cm = 6cm$$

L'area del quadrilatero ABCD si può ottenere sommando all'area del triangolo ABC, già trovata, quella del triangolo isoscele ACD. Si ha:

$$\begin{aligned} Area(ABCD) &= Area(ABC) + Area(ACD) = 36\sqrt{2}cm^2 + \frac{\overline{AC} \cdot \overline{KD}}{2} = \\ 36\sqrt{2}cm^2 + \frac{12\sqrt{2} \cdot 6}{2}cm^2 &= 72\sqrt{2}cm^2 \end{aligned}$$