

Sul teorema della bisettrice di un angolo interno

Problema

Nel triangolo ABC, la bisettrice dell'angolo in A divide il lato opposto BC in due parti il cui rapporto è 2/3. E' noto che AB misura 12cm e che il perimetro del triangolo misura 55cm. Risolvere i quesiti seguenti.

- 1) Determinare le misure dei lati del triangolo.
- 2) Determinare l'area del triangolo.
- 3) Calcolare la misura dell'apotema del triangolo.
- 4) Costruire il triangolo in scala e tracciare la circonferenza in esso inscritta.

Soluzione

- 1) Ricordiamo che la bisettrice di un angolo interno di un triangolo divide il lato opposto in due segmenti che sono proporzionali agli altri due lati. In relazione al problema in esame sia AD la bisettrice dell'angolo nel vertice A. Sussiste la proporzione $BD:AB=DC:AC$, da cui $BD:DC=AB:AC$ e poiché $BD:DC=2:3$ segue che anche $AB:AC=2:3$, quindi $3AB=2AC$.

Essendo $\overline{AB}=12cm$, ricaviamo

$$\overline{AC} = \frac{3}{2} \overline{AB} = \frac{3}{2} \cdot 12cm = 18cm.$$

Per determinare la misura del terzo lato BC del triangolo sfruttiamo l'informazione sulla misura del perimetro, che vale 55cm.

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 55cm, \text{ da cui } \overline{BC} = 55cm - (\overline{AB} + \overline{CA}) = 55cm - (12 + 18)cm = 25cm$$

- 2) Quando sono note le misure a, b, c , dei lati di un triangolo si può determinare l'area utilizzando la formula di Erone

$$Area = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

nella quale p indica il semiperimetro. Pertanto si ha

$$p = \frac{55}{2}cm, \text{ e } Area(ABC) = \sqrt{\frac{55}{2} \left(\frac{55}{2} - 12 \right) \left(\frac{55}{2} - 25 \right) \left(\frac{55}{2} - 18 \right)} cm^2 =$$

$$\sqrt{\frac{55}{2} \cdot \frac{31}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{19}{2}} cm^2 = \frac{5}{4} \sqrt{6479} cm^2$$

- 3) Ricordiamo che l'apotema di un poligono circoscrivibile ad una circonferenza è il raggio della circonferenza inscritta. Ogni triangolo ammette la circonferenza inscritta e detta r la **misura del raggio** di questa sussiste la seguente nota relazione tra l'**area S** del triangolo, il **semiperimetro p** dello stesso ed r :

$$S = rp, \text{ da cui } r = \frac{S}{p}.$$

Sostituendo i valori dell'area e del semiperimetro del triangolo in questione si ha:

$$\text{apotema}(ABC) = r = \frac{S}{p} = \frac{5}{4} \sqrt{6479} \text{ cm}^2 : \left(\frac{55}{2} \text{ cm} \right) = \frac{\sqrt{6479}}{22} \text{ cm}$$

- 4) La figura in scala contenente tutti gli elementi geometrici elaborati è riportata di seguito. In figura sono anche rappresentati gli elementi geometrici utilizzati per la costruzione del triangolo ABC e della circonferenza inscritta.

