

Sul trapezio e la circonferenza

(Applicazione del teorema delle tangenti e della similitudine)

Problema

Il trapezio rettangolo ABCD, con AB base maggiore, CD base minore e AD altezza, è circoscritto ad una circonferenza di raggio r e centro O. E' noto che la base minore misura $3r/2$. Risolvere i quesiti che seguono.

Q1 - Determinare le misure del perimetro e dell'area del trapezio.

Q2 - Detto E il punto di intersezione delle diagonali AC, BD, determinare le distanze di E dalle due basi del trapezio e precisare la posizione di E rispetto al punto O.

Q3 - Riconoscere che le misure dei lati del triangolo ACD sono in progressione aritmetica.

Q4 - Classificare il triangolo ABC rispetto ai lati.

(R: Il triangolo è isoscele su AB)

Soluzione

Q1- Facciamo riferimento alla **Figura 1**.

Ricordiamo che i segmenti delle tangenti condotte da un punto esterno P ad una circonferenza, aventi come estremi il punto P ed uno dei due punti di contatto con la circonferenza, sono congruenti e dunque, essendo T, H, K rispettivamente i punti di contatto della circonferenza con la base minore, con il lato obliquo e con la base maggiore risulta $CT \cong CH$, $BH \cong BK$.

Osserviamo che TK è diametro della circonferenza quindi $\overline{TD} = r$ e

dall'ipotesi $\overline{CD} = \frac{3}{2}r$ deduciamo che

$$\overline{CT} = \overline{CH} = \frac{r}{2}$$

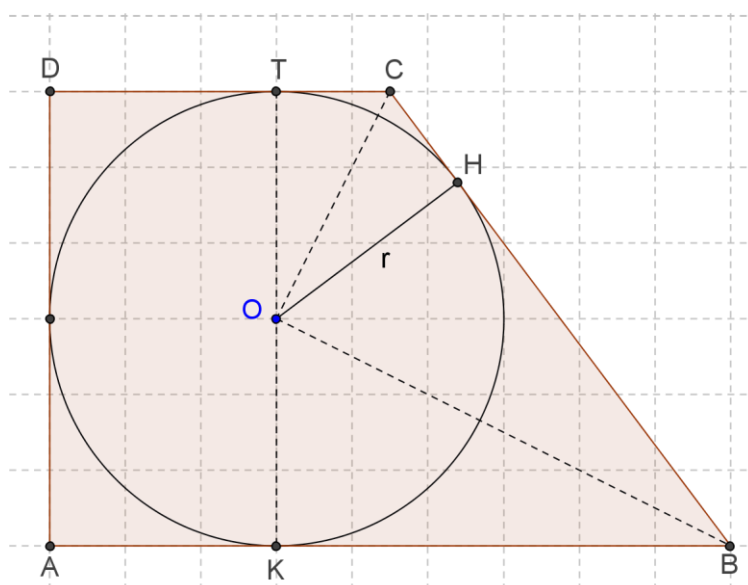


Figura 1

Occorre determinare la misura del segmento BH.

Osserviamo che il triangolo COB è rettangolo in O perché i due angoli ABC , BCD sono supplementari e gli angoli OBC , OCB sono rispettivamente le metà di detti angoli (proprietà delle tangenti ad una circonferenza: "condotte da un punto P esterno ad una circonferenza le due rette tangenti alla circonferenza, il segmento che congiunge P con il centro della circonferenza è

bisettrice dell'angolo formato dalle tangenti in questione"). Possiamo applicare al triangolo COB il secondo teorema di Euclide:

$$\overline{OH}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{CH}, \text{ da cui } \overline{BH} = \frac{\overline{OH}^2}{\overline{CH}} = r^2 : \frac{r}{2} = 2r.$$

I lati del trapezio misurano:

$$\overline{AB} = \overline{AK} + \overline{KB} = r + 2r = 3r; \quad \overline{BC} = \overline{BH} + \overline{HC} = 2r + \frac{r}{2} = \frac{5r}{2}; \quad \overline{CD} = \frac{3}{2}r; \quad \overline{AD} = 2r.$$

Misure del perimetro e dell'area del trapezio ABCD

$$Per(ABCD) = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD} = 3r + \frac{5r}{2} + \frac{3r}{2} + 2r = 9r$$

$$Area(ABCD) = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{CD}) \cdot \overline{AD} = \frac{1}{2}\left(3r + \frac{3r}{2}\right) \cdot 2r = \frac{9r^2}{2}$$

Q2-Facciamo riferimento alla Figura 2.

Per trovare le misure delle distanze di E, punto di intersezione delle diagonali AC, BD, dalle due basi, confrontiamo i due triangoli AEB, DEC ed osserviamo che sono simili. Infatti, sono congruenti gli angoli BAC , ACD perché coppia di angoli alterni interni formati dalle rette parallele delle basi del trapezio ABCD tagliate dalla retta AC; hanno gli angoli AEB, CED congruenti perché opposti al vertice. Dunque i triangoli sono simili per il primo criterio di similitudine.

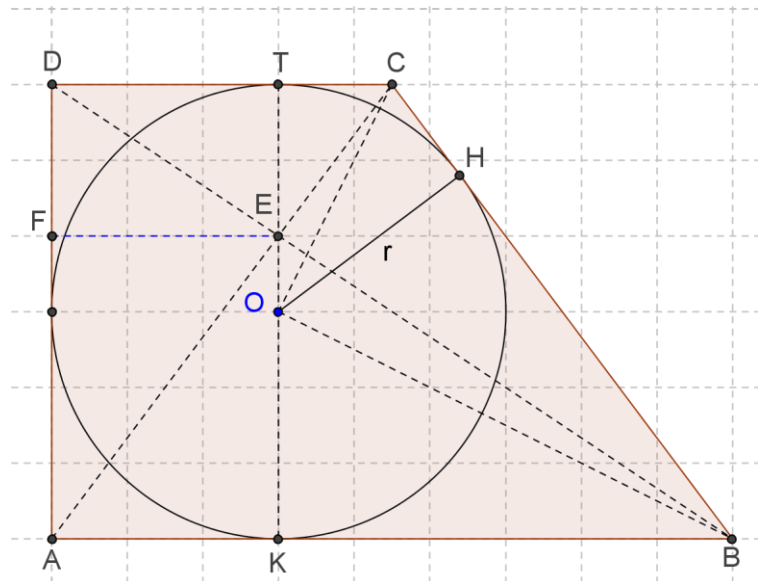


Figura 2

Osservazione

A questo punto non sappiamo ancora se il punto E si trova sul diametro TK.

Indichiamo con h_1 la misura dell'altezza del triangolo ABE relativa ad AB e con h_2 quella dell'altezza del triangolo DEC relativa alla base DC. Sappiamo che $h_1 + h_2 = 2r$.

Ricordiamo ora che in due triangoli simili le altezze stanno tra loro come le rispettive basi (teorema delle altezze), quindi

$$\text{dist}(E, DC):DC = \text{dist}(E, AB):AB.$$

Con i simboli introdotti per le misure delle due altezze si ha

$$h_1 : \frac{3}{2}r = h_2 : 3r, \text{ da cui anche } h_1 : \frac{3}{2}r = (2r - h_1) : 3r.$$

Passiamo all'equazione corrispondente

$$3rh_1 = \frac{3}{2}r(2r - h_1), \text{ che risolta fornisce } h_1 = \frac{2}{3}r \text{ e perciò } h_2 = \frac{4}{3}r.$$

Posizione del punto E rispetto al centro O della circonferenza

Conduciamo da E la parallela alle basi del trapezio ABCD e sia F il punto di intersezione con il lato AD. I due triangoli AEF, ACD sono rettangoli e simili perché hanno in comune l'angolo acuto nel vertice A. Sussiste pertanto la proporzione $AF:AD=EF:CD$. Sappiamo che $\overline{AF} = h_2 = \frac{4}{3}r$, dunque sussiste la proporzione

$\frac{4}{3}r : 2r = \overline{EF} : \frac{3}{2}r$, dalla quale si ricava $\overline{EF} = r$. Poiché $EF \perp AD$ e quindi EF rappresenta anche la distanza di E dal lato AD, dal valore ottenuto $\overline{EF} = r$ si conclude che il punto E appartiene al diametro TK.

Conclusione- Il punto E si trova al disopra di O rispetto alla base AB, con $\overline{OE} = \frac{1}{3}r$.

Q3- Misure dei lati del triangolo ACD

$$\overline{CD} = \frac{3}{2}r, \quad \overline{AD} = 2r, \quad \overline{AC} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2} = \sqrt{4r^2 + \frac{9}{4}r^2} = \frac{5}{2}r$$

I valori delle misure dei lati del triangolo ABC, presi nell'ordine $\overline{CD}, \overline{AD}, \overline{AC}$, **formano una progressione aritmetica** di ragione $d=r/2$.

Q4-Classificazione del triangolo ABC.

Ne punto precedente abbiamo ricavato la misura di AC; notiamo che è uguale alla misura del lato BC del trapezio, quindi il triangolo **ABC è isoscele su AB**.