

Sulla Geometria dei parallelogrammi

(Risoluzione dei due problemi assegnati in una prova di verifica¹)

P1) Considerato il parallelogramma ABCD, dimostrare che se la bisettrice di uno degli angoli esterni al vertice B è parallela alla diagonale AC allora il parallelogramma è un rombo.

Soluzione

Strategia risolutiva.

Per provare che il parallelogramma è un rombo dimostreremo che ha due lati consecutivi congruenti, dopo di che, ricordato che un rombo è un parallelogramma avente tutti i lati congruenti e tenuta presente la proprietà dei parallelogrammi di avere i lati opposti congruenti, seguirà la tesi.

Analisi e risoluzione del problema.

Facciamo riferimento alla figura riportata di seguito ([apri la figura con Cabri](#)) ed osserviamo che:

- ✚ la retta r , bisettrice dell'angolo

esterno $\widehat{CBX}$ del parallelogramma, divide l'angolo in due angoli

congruenti : $\widehat{CBY} \cong \widehat{YBX}$;

- ✚ poiché per ipotesi la bisettrice r è parallela alla diagonale AC, considerate la retta di AC e la retta r tagliate dalla trasversale BC si osserva che sono congruenti gli angoli $\widehat{ACB}$, $\widehat{CBY}$ perché coppia di angoli alterni interni;

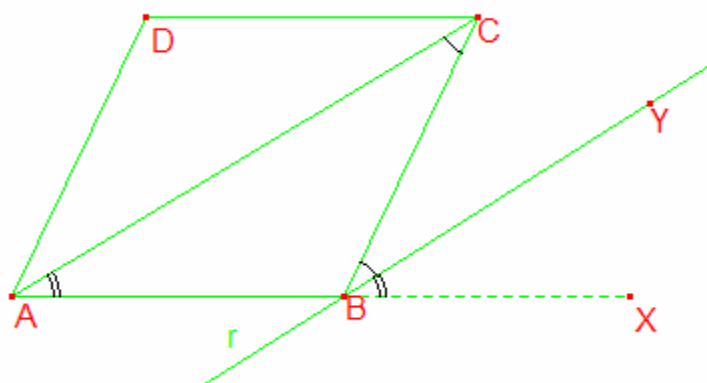
- ✚ rispetto alla coppia di rette r e la retta della diagonale AC, tagliate dalla trasversale AX, i due angoli $\widehat{CAB}$, $\widehat{YBX}$ formano una coppia di angoli corrispondenti, dunque sono congruenti.

Otteniamo perciò la seguente catena di congruenze

$$\widehat{CAB} \cong \widehat{YBX} \cong \widehat{CBY} \cong \widehat{ACB}$$

dalla quale si deduce che il triangolo ABC ha gli angoli adiacenti alla base AC congruenti e perciò è isoscele con $AB \cong BC$.

A questo punto possiamo affermare che il parallelogramma ABCD ha i quattro lati congruenti perché $AB \cong CD$ e $AD \cong BC$ perché coppie di lati opposti del parallelogramma e dalla precedente congruenza si deduce $CD \cong AB \cong BC \cong AD$ e dunque è un rombo. C.V.D.



¹ I testi dei problemi risolti sono stati assegnati il 28-08-2008 nella prova di matematica per l'accertamento del recupero dei debiti formativi attribuiti agli alunni della classe 1D, Ind. PNI, del Liceo Scientifico G. Stampacchia- Tricase, nel mese di giugno 2008.

P2) Due parallelogrammi ABCD e ABEF hanno il lato AB in comune e gli altri vertici C, D, E, F non giacciono sulla stessa retta.

2.1) Dimostrare che CDEF è ancora un parallelogramma.

2.2) Dimostrare che il segmento che congiunge i centri dei due parallelogrammi ABCD, ABEF è parallelo ai due lati del parallelogramma DCEF non appartenenti ai parallelogrammi ABCD, ABEF e congruente alla metà degli stessi.

Soluzione

Strategia risolutiva.

Dimostreremo la prima tesi facendo vedere che il quadrilatero CDEF ha due lati opposti paralleli e congruenti. Per la seconda tesi richiameremo il teorema sulle proprietà del segmento che unisce i punti medi di due lati di un triangolo.

Analisi e risoluzione del problema.

Facciamo riferimento alla figura riportata .([apri la figura con Cabri](#))

Tesi 2.1)

I due parallelogrammi di partenza, ABCD, ABEF, hanno il lato AB in comune e poiché i lati opposti in un parallelogramma sono paralleli e congruenti si deduce immediatamente, per transitività, che DC è parallelo e congruente ad FE:

$$\begin{pmatrix} DC \parallel AB \\ DC \cong AB \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} FE \parallel AB \\ FE \cong AB \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} DC \parallel EF \\ DC \cong EF \end{pmatrix}$$

Ricordiamo ora che sussiste il seguente teorema: “ Se un quadrilatero ha due lati opposti paralleli e congruenti allora è un parallelogramma”, in virtù del quale si conclude che il quadrilatero CDEF è un parallelogramma.

C.V.D.

Tesi 2.2)

In figura P è il punto di intersezione delle diagonali del parallelogramma ABCD e Q quello delle diagonali del parallelogramma ABEF. Si tratta di dimostrare che il segmento PQ è parallelo al segmento CE ed uguale alla metà di questo. Per acquisire questa tesi basta considerare il triangolo

ACE e notare che P e Q sono rispettivamente i punti medi dei lati AC ed AE. A questo punto, ricordato che il segmento che congiunge i punti medi di un triangolo è parallelo al terzo lato ed

uguale alla metà di questo si deduce che $PQ \parallel CE$ e che $PQ \cong \frac{1}{2} CE$. C.V.D.

