

Solidi di rotazione

Doppio Cono ed una Sfera

Problema_1

Si consideri la circonferenza Γ di diametro $AB=2r$ e centro O e si tracci la semiretta s avente origine in O e passante per B . Esternamente alla circonferenza prendere un punto P sulla semiretta s e condurre per esso i due segmenti tangenti alla circonferenza, indicando con C e D i punti di contatto.

Q1- Determinare la posizione del punto P in modo che il volume del solido Σ descritto dal triangolo OC in una rotazione completa attorno alla semiretta s sia pari ai $2/3$ del volume della sfera descritta nella stessa rotazione dal cerchio delimitato dalla circonferenza Γ .

Q2- Riconosciuto che P può assumere solo una posizione, determinare per quella posizione il rapporto tra l'area della superficie totale del solido di rotazione Σ e l'area della superficie della sfera suddetta.

Soluzione

Poniamo $\widehat{OPC} = \alpha$.

Q1- Facciamo riferimento alla figura riportata a lato.

Sussistono le seguenti relazioni.

$$\overline{OH} = \overline{OC} \sin \alpha = r \sin \alpha;$$

$$\overline{HC} = \overline{OC} \cos \alpha = r \cos \alpha; \quad \overline{OP} = \frac{r}{\sin \alpha}.$$

Il solido di rotazione è composto da due coni combacianti, uno avente vertice in O e l'altro in P . Il volume di questo solido è:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \pi \overline{HC}^2 \cdot \overline{OH} + \frac{1}{3} \pi \overline{HC}^2 \cdot \overline{HP} = \frac{1}{3} \pi \overline{HC}^2 \cdot \overline{OP} = \\ &= \frac{1}{3} \pi r^3 \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha}. \end{aligned}$$

Poiché il volume della sfera è $\frac{4}{3} \pi r^3$, uguagliando il volume del solido ai $2/3$ del volume della sfera si ha l'equazione

$$\frac{1}{3} \pi r^3 \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \rightarrow 3 \cos^2 \alpha = 8 \sin \alpha \rightarrow 3 \sin^2 \alpha + 8 \sin \alpha - 3 = 0 \rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{3}$$

e quindi $\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) = 19^\circ 28' 16''$.

Q2- Osserviamo che $\overline{CP} = r \cot g \alpha$ e possiamo calcolare l'area della superficie totale del solido di rotazione, data dalla somma delle aree delle superfici laterali dei due coni indicati prima.

$$S_{tot} = \pi \overline{CH} (\overline{CP} + \overline{OC}) = \pi r \cos \alpha (r \cot g \alpha + r) = \pi r^2 \cos \alpha (\cot g \alpha + 1)$$

Il rapporto R tra il valore trovato e l'area della superficie della sfera è

$$R = \frac{\pi r^2 \cos \alpha (\cot g \alpha + 1)}{4 \pi r^2} = \frac{1}{4} \cdot \cos \alpha (\cot g \alpha + 1)$$

Tenendo conto che per l'angolo soluzione del problema risulta $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ si ricava $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ e

$\cot g \alpha = 2\sqrt{2}$. Il rapporto richiesto vale

$$R = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} (2\sqrt{2} + 1) = \frac{4 + \sqrt{2}}{6}$$

