

Geometria dello spazio (sfera, cono inscritto, calotta sferica)

Problema

In una sfera di raggio R è inscritto un cono circolare retto avente altezza $h=4R/3$.

- Determinare il rapporto tra il volume del cono e quello della sfera.
- Determinare l'area della superficie totale del solido formato dal cono e dal segmento sferico individuato dall'intersezione del piano di base del cono con la sfera e giacente nel semispazio opposto a quello contenente il cono.

Soluzione

- a) Il raggio r di base del cono circolare retto vale

$$r = \sqrt{\frac{4}{3}R \cdot \frac{2}{3}R} = \frac{2}{3}R\sqrt{2}$$

Il volume del cono è :

$$V_{cono} = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi \left(\frac{2}{3}R\sqrt{2}\right)^2 \cdot \frac{4}{3}R}{3} = \frac{32\pi R^3}{81}$$

Il volume della sfera è:

$$V_{sfera} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Il valore del rapporto richiesto è:

$$\frac{V_{cono}}{V_{sfera}} = \frac{\frac{32\pi R^3}{81}}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{8}{27}$$

- b) La superficie totale del solido in questione è formata dalla superficie laterale del cono e dalla superficie della calotta che delimita il segmento circolare.

Avendo indicato con r il raggio del cerchio di base del cono, e quindi anche della base della calotta, indicando con a la misura dell'**apotema** del cono e con h' quella dell'altezza della calotta, risulta:

area della superficie laterale del cono è: $S_1 = A_l(\text{Cono}) = \pi r a$;

area della calotta: $S_2 = A(\text{calotta}) = 2\pi R h'$

Nelle formule si ha
dove

$$a = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\sqrt{2}R\right)^2 + \left(\frac{4}{3}R\right)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{6}R ;$$

$$h' = \frac{2}{3}R .$$

Pertanto l'area della superficie del solido è

$$S = S_1 + S_2 = \pi r a + 2\pi R h' = \pi \left(\frac{2}{3}\sqrt{2}R \cdot \frac{2}{3}\sqrt{6}R + 2R \cdot \frac{2}{3}R \right) = \frac{4}{3}\pi R^2 \left(\frac{2}{3}\sqrt{3} + 1 \right)$$

