

Geometria dello spazio

Problema sulla sfera, sul cilindro e sul cono

Problema_4¹

Data la semicirconferenza γ di centro O e diametro $AB=2R$, si consideri su γ un punto P e sia H la sua proiezione ortogonale sul diametro AB. Posto $\overline{BH} = x$, si risolvano i quesiti seguenti.

Q1- Determinare per quale valore di x il settore circolare OBP descrive in una rotazione completa intorno alla retta del diametro AB un settore sferico avente volume pari ad un terzo del volume della sfera descritta dal semicerchio di diametro AB.

Q2- Calcolare il rapporto tra l'area della superficie totale del settore sferico di cui al precedente quesito Q1 e l'area della sfera di raggio R.

Q3- Considerato il cilindro circolare retto inscritto nella superficie sferica di raggio R avente come base il cerchio base della calotta che delimita il settore sferico di cui al punto Q1, calcolarne il volume.

Q4- Realizzare una figura illustrativa del problema risolto.

Soluzione

Facciamo riferimento alla figura riportata di seguito.

Q1- Il volume del settore sferico è

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 \overline{HB} = \frac{2}{3} \pi R^2 x$$

Imponendo che questo valore sia uguale ad un terzo del volume della sfera di raggio R si ha l'uguaglianza

$$\frac{2}{3} \pi R^2 x = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \rightarrow x = \frac{2}{3} R$$

Dunque risulta $\overline{BH} = \frac{2}{3} R$.

Q2- L'area della superficie totale del settore sferico è la somma dell'area della calotta sferica che lo definisce con l'area della superficie laterale del cono avente vertice nel centro O della sfera e base coincidente con quella della calotta sferica. Si ha:

$$\overline{HP} = \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{OH}^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}R}{3}$$

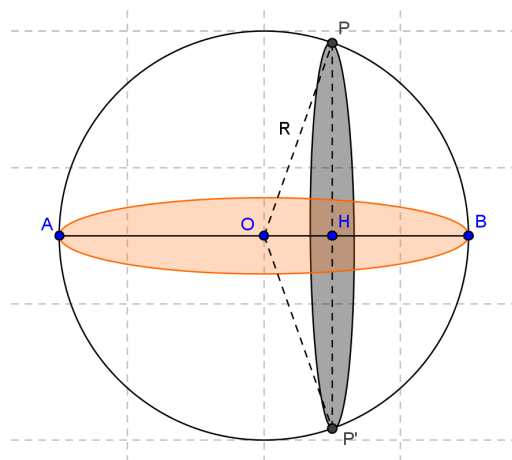
L'area della calotta sferica PBP' è:

$$S_1(\text{calotta}) = 2\pi R \cdot \overline{BH} = 2\pi R \cdot \frac{2}{3} R = \frac{4}{3} \pi R^2$$

L'area della superficie laterale del cono OPP' è: $S_l(\text{cono}) = \pi \cdot \overline{HP} \cdot \overline{OP} = \pi \frac{2\sqrt{2}}{3} R^2$

L'area totale del settore sferico è:

$$S_{\text{settore_sferico}} = S_1(\text{calotta}) + S_l(\text{cono}) = \frac{4}{3} \pi R^2 + \pi \frac{2\sqrt{2}}{3} R^2 = \frac{2}{3} \pi (2 + \sqrt{2}) R^2$$



¹ Problema_4 assegnato nel compito in classe M6_4I-11-05-10

Il valore del rapporto tra l'area totale del settore sferico e l'area della sfera in oggetto è $\frac{2+\sqrt{2}}{6}$.

Q3- Il Cilindro in questione ha altezza $h = \frac{2}{3}R$ ed il suo volume è:

$$V_{cil} = \pi \overline{HP}^2 \cdot h = \pi \left(\frac{2\sqrt{2}R}{3} \right)^2 \cdot \frac{2}{3}R = \frac{16}{27}\pi R^3$$

