

Geometria dello spazio

Problema sulla piramide e sul prisma

Problema_3¹

Una piramide retta ha per base il triangolo ABC, isoscele su BC, i cui lati AB, BC misurano rispettivamente 13cm e 10cm. L'altezza della piramide è $h = \frac{20\sqrt{2}}{3} \text{ cm}$.

Q1- Calcolare la misura dell'apotema e l'area della superficie laterale della piramide. Determinare l'ampiezza dell'angolo di inclinazione di ciascuna faccia della piramide sul piano di base.

Q2- Si seziona la piramide con un piano parallelo alla base la cui distanza dal vertice della piramide è i tre quarti dell'altezza ottenendo il triangolo A'B'C'. Determinare l'area del triangolo A'B'C'.

Q3- Considerato il prisma retto inscritto nella piramide VABC avente il triangolo A'B'C' come base superiore e come base inferiore il triangolo A''B''C'' proiezione ortogonale del triangolo A'B'C' sul piano della base ABC, calcolare il volume del prisma e l'area delle sua superficie laterale.

Q4- Realizzare una figura illustrativa del problema risolto.

Soluzione

Q1- Altezza di ABC relativa a BC: $\overline{AM} = 12 \text{ cm}$

Area del triangolo ABC: $S = 60 \text{ cm}^2$

Raggio della circonferenza inscritta al triangolo: $r = \frac{S}{p} = \frac{60 \text{ cm}^2}{18 \text{ cm}} = \frac{10}{3} \text{ cm}$

Apotema della piramide: $a = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{\left(\frac{20\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2} \text{ cm} = 10 \text{ cm}$

Area della superficie laterale della piramide: $S_l(VABC) = p \cdot a = 18 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} = 180 \text{ cm}^2$

Ampiezza degli angoli di inclinazione delle facce.

Le facce della piramide formano con il piano di base angoli congruenti. Detto α uno di essi, risulta:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{r} \rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{h}{r} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{20\sqrt{2}}{3} : \frac{10}{3} \right) =$$

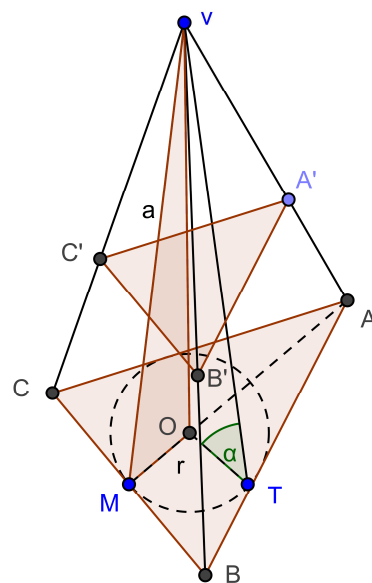
$$\operatorname{arctg} (2\sqrt{2}) = 70^\circ 31' 44''$$

Q2- E' noto che sezionando la piramide con un piano parallelo alla base l'area del poligono ottenuto sta all'area della base come i quadrati delle distanze di dette basi dal vertice della piramide. Poiché la distanza h' del piano dal vertice è $3h/4$, essendo h l'altezza della piramide, indicando con S' l'area del triangolo sezione si ha:

$$S' : S = (h')^2 : h^2 \rightarrow S' = S \cdot \frac{(h')^2}{h^2} = S \cdot \frac{\left(\frac{3h}{4}\right)^2}{h^2} = \frac{9}{16} S =$$

$$\frac{9}{16} \cdot 180 \text{ cm}^2 = \frac{405}{4} \text{ cm}^2$$

Q3- Il prisma retto ha come base il triangolo A''B''C'', congruente al triangolo A'B'C' e come altezza h'' pari ad un quarto dell'altezza della piramide. Pertanto si ha:



¹ Problema_3 assegnato nel compito in classe M6_4I-11-05-10

Volume del prisma: $V_{prisma} = S' \cdot h = \frac{405}{4} cm^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{20\sqrt{2}}{3} cm = 675\sqrt{2} cm^3;$

Perimetro di una base del prisma: $2p'(A'B'C') = \frac{3}{4} \cdot 2p(ABC) = \frac{3}{4} \cdot 36 cm = 27 cm$

Area della superficie laterale del prisma: $S_{prisma}^l = 2p' \cdot h = 27 cm \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{20\sqrt{2}}{3} cm = 45\sqrt{2} cm^2$

Area della superficie totale del prisma:

$$S_{prisma}^{tot.} = 2S_{base} + S_{prisma}^l = 2 \cdot \frac{405}{4} cm^2 + 45\sqrt{2} cm^2 = \frac{45}{2} (9 + 2\sqrt{2}) cm^2$$