

GEOMETRIA DELLO SPAZIO

Tronco di cono avente superficie laterale equivalente all'unione delle superfici delle due basi

⁽¹⁾**Problema_2)**-Un tronco di cono circolare retto ha i raggi delle due basi l'uno il doppio dell'altro e l'area della superficie laterale uguaglia la somma delle aree delle due basi. Indicati rispettivamente con r , R , h , a il raggio della base minore, il raggio della base maggiore, l'altezza del tronco e l'apotema, risolvere i quesiti che seguono.

Q1- Esprimere h ed a in funzione di r .

Q2- Calcolare l'altezza del cono cui appartiene il tronco di cono assegnato.

Q3- Determinare il valore di r per il quale la misura dell'area della superficie totale del tronco di cono vale $1000\pi\text{cm}^2$.

Soluzione

Facciamo riferimento alla figura riportata a margine.

Q1- La somma delle aree delle due basi è

$$S_1 + S_2 = \pi R^2 + \pi r^2 = \pi(R^2 + r^2);$$

l'area della superficie laterale è

$$S_l = \frac{1}{2} \cdot (2\pi r + 2\pi R)a = \pi(r + R)a.$$

Sappiamo che $R = 2r$ e che $S_l = S_1 + S_2$,

quindi

$$\begin{cases} R = 2r \\ \pi(r + R)a = \pi(R^2 + r^2) \end{cases} \rightarrow 3ra = 5r^2 \rightarrow$$

$$a = \frac{5}{3}r.$$

Dal triangolo rettangolo BKB' deduciamo

$$\begin{aligned} h &= \overline{B'K} = \sqrt{\overline{BB'}^2 - \overline{KB}^2} = \\ &= \sqrt{a^2 - (R - r)^2} = \sqrt{a^2 - r^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{5}{3}r\right)^2 - r^2} = \frac{4}{3}r \end{aligned}$$

Q2- Nella figura riportata è indicato anche il cono completo cui appartiene il tronco in oggetto, con stile tratteggiato è rappresentato il cono che completa il tronco.

Per calcolare la misura dell'altezza VO del cono occorre ricavare la misura dell'altezza VO' del cono superiore. All'uopo basta confrontare i triangoli rettangoli simili $VO'B'$, $B'KB$. Poiché risulta $VO': B'K = O'B': KB$, segue

$$\overline{VO'} = \frac{\overline{B'K}}{\overline{O'B'}} \cdot \overline{KB} = \frac{h}{r} \cdot r = h$$

Dunque l'altezza del cono superiore è uguale all'altezza del tronco di cono e perciò

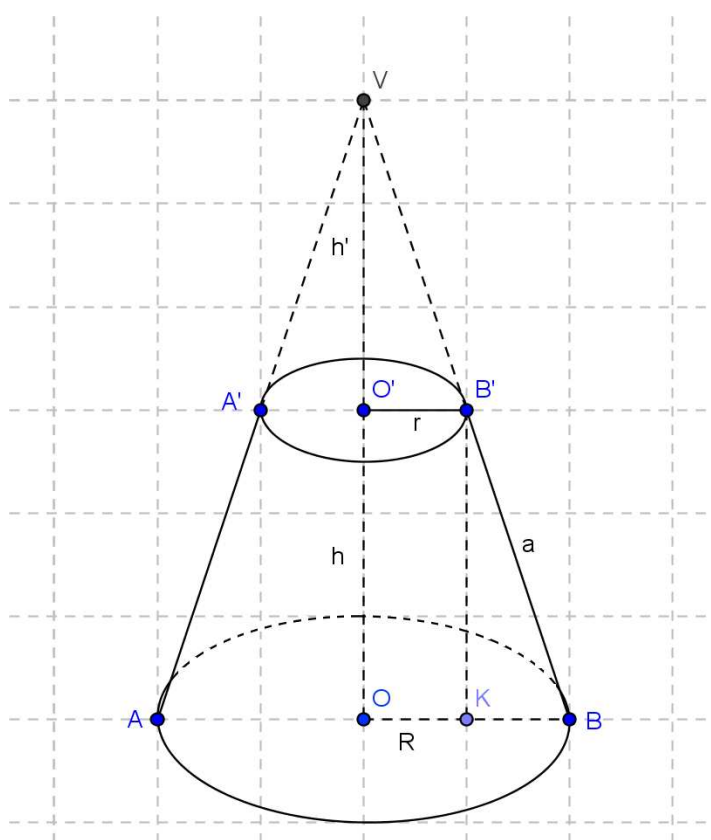


Figura 1- Troco di cono e cono completo di appartenenza

⁽¹⁾ Problema assegnato come verifica scritta in una quarta classe del Liceo Scientifico: M5_4I-18-04-11



$$\overline{VO} = 2h = \frac{8}{3}r.$$

Q3- E' noto che l'area delle superficie laterale del tronco di cono uguaglia la somma delle aree delle due basi, dunque l'area della superficie totale è uguale al doppio della somma delle aree delle due basi. Uguagliamo tale espressione al valore $1000\pi\text{cm}^2$ per ottenere un'equazione dalla quale ricavare la misura di r .

Il cono completo cui appartiene il tronco di cono assegnato è riportato in figura

$$2(S_1 + S_2) = 1000\pi\text{cm}^2 \rightarrow 2\pi(R^2 + r^2) = 1000\pi\text{cm}^2, \text{ e con } R=2r,$$

$$2\pi \cdot 5r^2 = 1000\pi\text{cm}^2 \rightarrow r = 10\text{cm}$$

