

GEOMETRIA DELLO SPAZIO

Una piramide retta con base un triangolo rettangolo

⁽¹⁾**Problema_1**)-Il triangolo ABC, rettangolo in A è la base della piramide retta VABC. E' noto che $\overline{AB} = 10\text{cm}$, $\overline{AC} = 8\text{cm}$ e l'area della superficie laterale è $40\sqrt{2}\text{cm}^2$.

Quesiti

Q1- Determinare la misura del raggio della circonferenza inscritta nel triangolo ABC.

Q2- Determinare la misura dell'altezza della piramide.

Q3- Determinare l'ampiezza dell'angolo formato dal piano di ogni faccia della piramide con il piano di base.

Soluzione

La figura di riferimento è riportata a margine.

Q1- Ricordiamo che l'area S di un poligono circoscrivibile ad una circonferenza si può ottenere moltiplicando la misura del semiperimetro (p) per la misura del raggio (r) della circonferenza inscritta:

$$S = pr$$

Sfruttando detta proprietà, possiamo determinare la misura del raggio della circonferenza richiesto una volta trovati i valori del perimetro e l'area del triangolo rettangolo ABC. Si ha:

$$S = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} \cdot 10\text{cm} \cdot 8\text{cm} = 40\text{cm}^2;$$

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2} =$$

$$\sqrt{10^2 + 8^2}\text{cm} = 2\sqrt{41}\text{cm}$$

$$2p(ABC) = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} =$$

$$2(9 + \sqrt{41})\text{cm}$$

Misura del raggio della circonferenza:

$$r = \frac{S}{p} = \frac{40\text{cm}^2}{(9 + \sqrt{41})\text{cm}} = (9 - \sqrt{41})\text{cm}$$

Q2- Possiamo trovare la misura dell'altezza VO dopo aver calcolato la misura dell'apotema della piramide e quest'ultima si determina sfruttando il valore dell'area della superficie laterale.

$$S_l = \frac{\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC}}{2} \cdot a \rightarrow a = \frac{2S_l}{\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC}} = \frac{2 \cdot 40\sqrt{2}\text{cm}^2}{2(9 + \sqrt{41})\text{cm}} = \frac{40\sqrt{2}(9 - \sqrt{41})}{(9 + \sqrt{41})(9 - \sqrt{41})}\text{cm} =$$

$$\frac{40\sqrt{2}(9 - \sqrt{41})}{40}\text{cm} = (9\sqrt{2} - \sqrt{82})\text{cm}$$

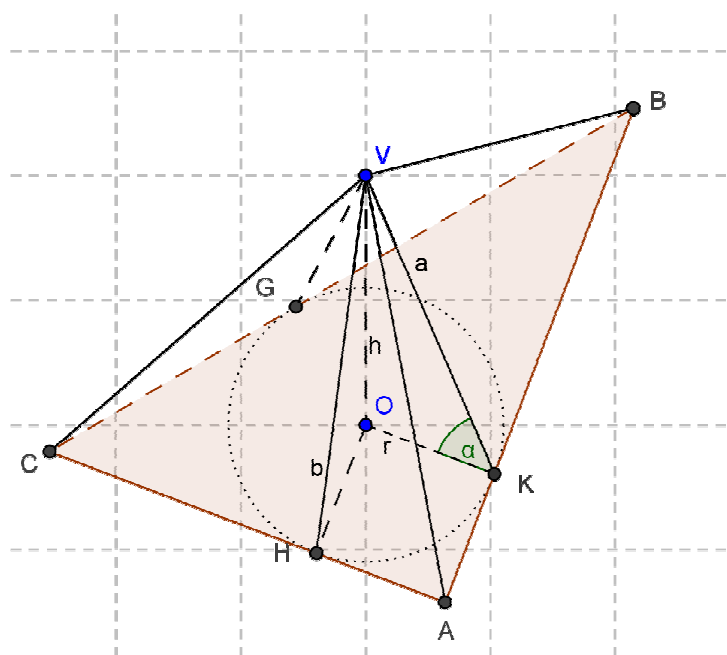


Figura 1-Piramide retta a base triangolare-

[Apri la figura con GeoGebra](#)

⁽¹⁾ Problema assegnato come verifica scritta in una quarta classe del Liceo Scientifico:M5_4I-18-04-11



Ora, applicando il teorema di Pitagora al triangolo VOK, ricaviamo la misura dell'altezza.

$$\overline{VO} = h = \sqrt{a^2 - r^2} = \sqrt{(9\sqrt{2} - \sqrt{82})^2 - (9 - \sqrt{41})^2} \text{ cm} = (9 - \sqrt{41}) \text{ cm}$$

Q3- Poiché la piramide è retta, le sue facce formano con il piano di base angoli congruenti. Infatti, se si considerano i triangoli rettangoli aventi un cateto coincidente con l'altezza VO, essendo O il centro della circonferenza inscritta nel triangolo di base, e come secondo cateto il raggio congiungente O con il punto di contatto della circonferenza con i rispettivi lati del triangolo AB, AC, BC, detti triangoli sono congruenti in quanto hanno i cateti ordinatamente congruenti. In figura è rappresentato l'angolo α che la faccia VAB forma con il piano di base. Poiché risulta

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{r} = \frac{\overline{VO}}{r} \rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{\overline{VO}}{r} \right).$$

Nella risoluzione del precedente quesito Q2 abbiamo ricavato la misura dell'altezza VO della piramide e si vede che è uguale a quella del raggio della circonferenza inscritta nella base, dunque il triangolo VOK è rettangolo isoscele; le facce della piramide formano con il piano di base angoli di 45° .

