

Geometria dello spazio⁽¹⁾

Problema_2(Una piramide a base quadrata)

La piramide VABCD, di vertice V, ha come base il quadrato ABCD, di lato l . Il piede H dell'altezza cade sulla diagonale AC e la divide in due parti che stanno tra loro come 1:3. Sapendo che la misura dell'altezza è uguale a quella degli spigoli della base, risolvere i quesiti che seguono.

Q1- Determinare le misure dei due segmenti in cui resta divisa la diagonale AC.

Q2- Calcolare le misure dell'area della superficie laterale e quella del volume.

Q3- Calcolare le ampiezze degli angoli formati dalle facce delle piramide con il piano di base.

Soluzione

Ci riferiamo alla figura a lato.

Q1-ABCD quadrato; $\overline{AB} = l$, $\overline{VH} = l$; $VH \perp ABCD$;

$$\overline{AC} = l\sqrt{2}; \quad HC = \frac{1}{3} \overline{AH} = \frac{1}{4} \overline{AC};$$

$$Q2- \quad HF \perp BC \text{ e } \overline{HF} = \frac{1}{4} \overline{AB} = \frac{1}{4} l;$$

$$\overline{GH} \perp AB; \quad \overline{GH} = \frac{3}{4} \overline{BC} = \frac{3}{4} l.$$

Applicando il teorema di Pitagora si trovano le misure dei segmenti VF, VG, altezze rispettivamente dei triangoli VBC, VAB. Si noti che VF è altezza del triangolo VBC relativa alla base BC per il teorema delle tre perpendicolari; per lo stesso teorema VG risulta essere altezza della faccia VAB relativa alla base AB.

$$\overline{VF} = \sqrt{\overline{VH}^2 + \overline{HF}^2} = \frac{l}{4} \sqrt{17}; \quad \overline{VG} = \sqrt{\overline{VH}^2 + \overline{GH}^2} = \frac{5l}{4}$$

Area della superficie laterale

$$S_l = 2 \left(\frac{\overline{AB} \cdot \overline{VG}}{2} + \frac{\overline{BC} \cdot \overline{VF}}{2} \right) = l \left(\frac{5l}{4} + \frac{l}{4} \sqrt{17} \right) = \frac{l^2}{4} (5 + \sqrt{17})$$

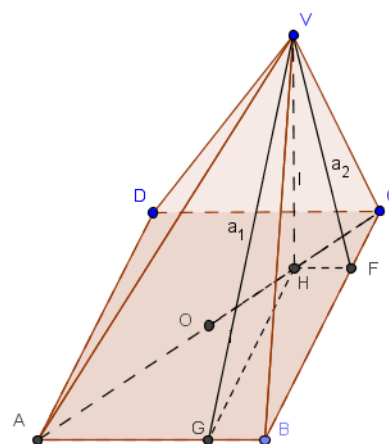
Volume della piramide

$$Vol = \frac{1}{3} l^3$$

Q3-Per simmetria, le facce VAB e VAD formano con il piano di base angoli aventi la stessa ampiezza: sia α il valore dell'ampiezza comune degli angoli; analogamente, le facce VBC, VDC formano con il piano di base angoli aventi la stessa ampiezza: sia β il valore dell'ampiezza comune. Dai triangoli rettangoli VHF, VHG, rettangoli in H, si ha:

$$tg \alpha = \frac{\overline{VH}}{\overline{HG}} = \frac{l}{\frac{3}{4}l} = \frac{4}{3} \rightarrow \alpha = \text{artg} \left(\frac{4}{3} \right) \approx 53^\circ 7' 48'';$$

$$tg \beta = \frac{\overline{VH}}{\overline{HF}} = \frac{l}{\frac{1}{4}l} = 4 \rightarrow \beta = \text{artg} \, 4 \approx 75^\circ 57' 50''$$



⁽¹⁾ Problema assegnato nella prova di saldo debiti formativi nella Classe 4I-Liceo Sc. il 25-08-2011