

Geometria dello spazio¹

Parallelepipedo rettangolo, angolo diedro

Nel parallelepipedo rettangolo ABCDA'B'C'D' risulta $\overline{AB} = 6k$, $\overline{BC} = 3k$, $\overline{AA'} = 9k$, con $k > 0$. Risolvere i quesiti che seguono.

Q1- Determinare il valore del parametro k sapendo che l'area della superficie totale misura 792cm^2 .

Q2- Determinare la misura delle diagonali del parallelepipedo.

Q3- Dopo aver dato la definizione di sezione normale di un diedro, determinare l'ampiezza del diedro formato dalla faccia ABB'A' con il piano contenente le diagonali del parallelepipedo uscenti dai vertici A, A'.

Soluzione

La figura del parallelepipedo è quella riportata a margine.

Q1- Calcolo dell'area della superficie totale del parallelepipedo in funzione del parametro k .

$$S_T = 2 \overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{AB} \cdot \overline{AA'} + \overline{BC} \cdot \overline{CC'} =$$

$$2 \cdot 18k^2 + 54k^2 + 27k^2 = 198k^2$$

Imponendo l'uguaglianza del valore trovato a quello assegnato si determina il valore del parametro:

$$198k^2 = 792\text{cm}^2 \rightarrow k = 2$$

Q2- Ricordiamo che le diagonali di un parallelepipedo rettangolo sono congruenti tra loro e la misura è uguale alla radice quadrata della somma dei quadrati delle tre dimensioni (si applica il teorema di Pitagora due volte). Indichiamo velocemente il percorso.

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABC (AC è l'ipotenusa):

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 45k^2;$$

applicando lo stesso teorema al triangolo rettangolo ACC' (AC' è l'ipotenusa):

$$d = \overline{AC'} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{CC'}^2} = \sqrt{45k^2 + 81k^2} = 3\sqrt{14}k.$$

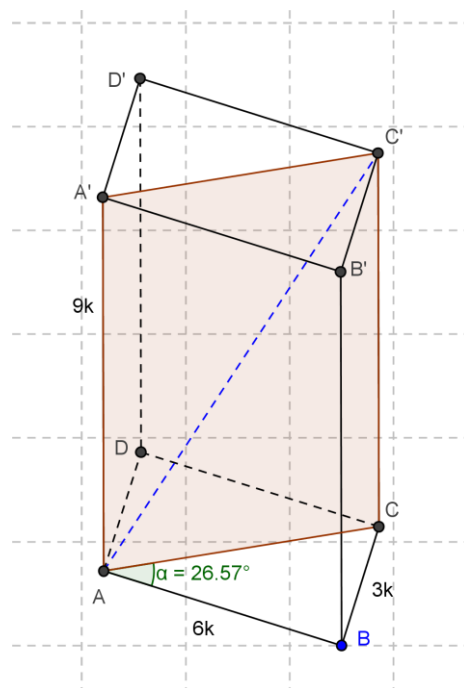
Tenendo conto del valore $k=2$ trovato in precedenza concludiamo che la misura delle diagonali del parallelepipedo è: $d = 6\sqrt{14}\text{cm}$.

Le dimensioni del parallelepipedo sono: 6cm, 12cm, 18cm.

Q3- Ricordiamo che per sezione normale di un diedro si intende l'angolo che si ottiene intersecando un diedro con un qualsiasi piano perpendicolare allo spigolo del diedro. L'ampiezza di una sezione normale di un diedro rappresenta anche l'ampiezza del diedro.

Ciò premesso, facciamo notare che il piano della base ABCD è perpendicolare allo spigolo AA' del diedro indicato nel quesito e dunque l'ampiezza del diedro è rappresentata da quella dell'angolo BAC. Poiché il triangolo ABC è rettangolo in B, l'ampiezza dell'angolo nel vertice A la possiamo determinare tramite la funzione tangente. Precisamente risulta:

$$\text{tg } BAC = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{6\text{cm}}{12\text{cm}} = \frac{1}{2} \rightarrow BAC = \arctg\left(\frac{1}{2}\right) \approx 26,57^\circ$$



¹ Esercizio proposto nel compito in classe M3_4I_28-02-11

Nella figura riportata l'angolo BAC è indicato con α e vi si legge anche il valore della misura approssimato al centesimo di grado sessagesimale.