Geometria dello spazio

Risoluzione di due problemi su prisma, piramide, cilindro, sfera[1]

Problema_1) (**Solidi a confronto**)- Una piramide regolare quadrangolare ed un prisma retto triangolare regolare hanno lo stesso volume. Sapendo che l'area di base della piramide è doppia dell'area di ciascuna delle due basi del prisma, risolvere i quesiti che seguono.
Q1- Detti h_1, h_2 rispettivamente i valori delle altezze del prisma e della piramide, determinare il valore del rapporto h_2/h_1. Determinare il valore del rapporto tra le misure degli spigoli delle basi dei due solidi.
Q2- Riconosciuto che $h_2>h_1$, sezionare la piramide con il piano parallelo alla base e distante da questa h_1. Determinare il valore del rapporto tra l'area S′ del poligono sezione e l'area S del poligono di base.
Q3- Realizzare una figura illustrativa dei quesiti affrontati.

Soluzione

Q1- Rapporto tra le altezze dei due solidi
Indicando con S_1 ed S_2 rispettivamente le aree della base del prisma e della piramide e con V_1, V_2 i volumi dei due solidi, sappiamo che sussistono le seguenti relazioni:

$$S_2 = 2S_1, \qquad V_1 = S_1h_1,\ V_2 = \frac{1}{3}S_2h_2$$

e poiché $V_1= V_2$ si ricava

$$S_1h_1 = \frac{1}{3}S_2h_2 \rightarrow S_1h_1 = \frac{1}{3}\cdot 2S_1h_2 \rightarrow \frac{h_2}{h_1} = \frac{3}{2}$$

Rapporto tra le misure degli spigoli di base
Il prisma ha per base un triangolo equilatero: sia l_1 la misura del lato. La piramide ha per base un quadrato: sia l_2 la misura del lato. Si deve determinare il valore del rapporto l_2/ l_1.

Area del triangolo di base del prisma è $S_1 = \frac{l_1^{\,2}}{4}\sqrt{3}$, mentre $S_2 = l_2^{\,2}$.

Essendo $S_2 = 2S_1$ segue $l_2^{\,2} = 2\cdot\frac{l_1^{\,2}}{4}\sqrt{3} \rightarrow \frac{l_2}{l_1} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt[4]{12}}{2}$

Q2- Ricordiamo che sezionando una piramide con un piano parallelo alla base la sezione ottenuta è un poligono simile alla base e l'area di detto poligono sezione sta all'area del poligono base come i quadrati delle distanze dei rispettivi poligoni dal vertice della piramide. Indicando S′ l'area del poligono (quadrato) sezione e con h′ la sua distanza dal vertice della piramide, sfruttando i simboli precedentemente introdotti si ha:

$$h' = h_2 - h_1 = h_2 - \frac{2}{3}h_2 = \frac{1}{3}h_2\,;$$

$\frac{S'}{S_2} = \frac{(h')^2}{(h_2)^2} = \frac{\left(\frac{1}{3}h_2\right)^2}{(h_2)^2} = \frac{1}{9}$; dunque l'area del poligono sezione è 1/9 dell'area del poligono di base della piramide.

Problema_2) Si consideri un cilindro circolare retto equilatero e la sfera ad esso circoscritta. Indicando con R la misura del raggio delle basi del cilindro calcolare:
Q1- il valore del rapporto tra l'area della superficie totale del cilindro e l'area della sfera circoscritta;
Q2- il rapporto tra il volume del cilindro ed il volume della sfera.

Soluzione

[1] Problemi assegnati nel compito in classe M6_4E-13-05-10

Q1- Il cilindro ha la misura dell'altezza uguale al diametro dei cerchi di base: h=2R. L'area della superficie totale è data dalla somma dell'area della superficie laterale con la somma delle aree delle due basi.

$S_{cil}^{l}=2\pi Rh=2\pi R\cdot 2R=4\pi R^2$; $S_{cil}^{basi}=2\pi R^2 \rightarrow S_{cil}^{tot}=S_{cil}^{l}+S_{cil}^{basi}=6\pi R^2$

Calcolo dell'area della superficie sferica

Sezionando il cilindro assegnato con un piano passante per il suo asse di simmetria perpendicolare alle basi si ottiene un quadrato; la diagonale di questo quadrato è un diametro della sfera circoscritta al cilindro. Indicando con R′ la misura del raggio della sfera circoscritta e con *d* la misura della diagonale indicata si ha:

$$2R'=d=\sqrt{2(2R)^2}=2\sqrt{2}R \rightarrow R'=\sqrt{2}R$$

L'area della superficie sferica è $S_{sf}=4\pi(R')^2=4\pi\left(\sqrt{2}R\right)^2=8\pi R^2$

Valore del rapporto tra le aree dei due solidi: $\frac{S_{cil}^{tot}}{S_{sf}}=\frac{6\pi R^2}{8\pi R^2}=\frac{3}{4}$

Rapporto dei volumi

Volume cilindro: $V_{cil}=\pi R^2\cdot 2R=2\pi R^3$

Volume della sfera: $V_{sf}=\frac{4}{3}\pi(R')^3=\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{2}R\right)^3=\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi R^3$

Rapporto: $\frac{V_{cil}}{V_{sf}}=\frac{2\pi R^3}{\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi R^3}=\frac{3}{4\sqrt{2}}$