

Problemi sulla disuguaglianza tra gli elementi di un triangolo

Problema_1

Dato il triangolo ABC dimostrare che ciascuna altezza del triangolo è minore della semisomma dei due lati del triangolo che concorrono nello stesso vertice dell'altezza.

Soluzione

Nella figura riportata a lato è rappresentata l'altezza CH relativa al lato AB. Vogliamo dimostrare che risulta soddisfatta la seguente disuguaglianza:

$$CH < \frac{AC + BC}{2}.$$

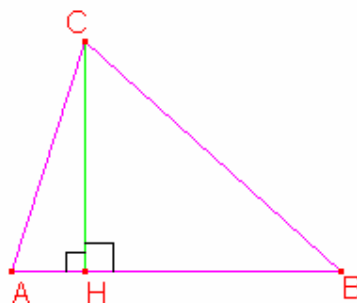
Osserviamo che i due triangoli ACH, BCH sono rettangoli nel vertice H, dunque i lati AC, BC sono le ipotenuse. Poiché in un triangolo rettangolo l'ipotenusa è il lato maggiore (perché all'angolo maggiore si oppone il lato maggiore), sussistono le due seguenti disuguaglianze:

$$CH < AC$$

$$CH < BC$$

che sommate membro a membro danno la disuguaglianza

$$2CH < AC + BC \Rightarrow CH < \frac{AC + BC}{2}.$$



Problema_2

Considerato un angolo di vertice A, sia P un punto interno all'angolo. Si porti su uno dei suoi lati il segmento AB in modo che sia congruente al segmento AP. Considerata la retta [B;P], sia C il punto in cui interseca il secondo lato dell'angolo. Dimostrare che $AC > AB$.

Soluzione

Osserviamo che il triangolo ABP è isoscele sulla base BP, quindi sono congruenti anche gli angoli $\widehat{ABP}$, $\widehat{APB}$. Ricordiamo che gli angoli congruenti di un triangolo isoscele sono acuti, pertanto l'angolo $\widehat{APC}$, che è supplementare di $\widehat{APB}$, è ottuso $\Rightarrow$ nel triangolo ACP il lato maggiore è AC $\Rightarrow AC > AP$. Poiché $AP \cong AB$, per transitività si ricava $AC > AB$.

