

Problema

Siano γ_1, γ_2 due circonferenze tangenti esternamente nel punto T ed s una qualsiasi retta passante per T e secante entrambe le circonferenze nei punti A e B. Dimostrare che le rette tangenti a γ_1 e γ_2 nei punti A e B sono parallele tra loro

Forniamo di seguito l'elenco dei passaggi da attuare per costruire la figura con Cabri.

Costruiamo la figura con Cabri

- ❖ Tracciare la circonferenza γ_1 di centro O_1 .
- ❖ Fissare un punto T su γ_1 e tracciare la retta che passa da O_1 e T.
- ❖ Fissare il punto O_2 sulla retta O_1T ; sarà il centro della circonferenza γ_2 .
- ❖ Tracciare la circonferenza di centro O_2 e passante per T.
- ❖ Tracciare una retta s per T e siano A e B i punti ulteriori in cui incontra le circonferenze γ_1, γ_2 .
- ❖ Tracciare i raggi O_1A, O_2B come segmenti. Assegnare ai due raggi il tipo tratteggio.
- ❖ Tracciare la retta t_A tangente a γ_1 in A : è sufficiente tracciare la retta per A perpendicolare al raggio perpendicolare al raggio O_1A .
- ❖ Ripetere le operazioni per tracciare la retta t_B tangente a γ_2 in B.
- ❖ Prendere un punto qualsiasi P sulla tangente t_A ed un punto qualsiasi Q sulla tangente t_B .
- ❖ Segnare gli angoli TAP e TBQ.
- ❖ Visualizzare le misure degli angoli TAP, TBQ e provare a modificare la figura. Cabri indicherà per i due angoli la stessa misura.

Dimostrazione della tesi del problema

Si riconosce che:

i triangoli isosceli ATO_1, BTO_2 hanno gli angoli $\widehat{ATO_1}, \widehat{BTO_2}$ congruenti perché opposti al vertice; quindi sono congruenti anche gli angoli $\widehat{TAO_1}, \widehat{TBO_2}$;

sono congruenti gli angoli $\widehat{O_1AP}, \widehat{O_2BQ}$ perché retti;

sono congruenti gli angoli $\widehat{TAP}$ e $\widehat{TBQ}$ perché somme di angoli congruenti $\Rightarrow$ le due rette tangenti sono parallele perché tagliate dalla retta trasversale AB formano una coppia di angoli alterni interni congruenti.

Seconda dimostrazione

Si può dimostrare la tesi anche in modo diverso.

Consideriamo la retta tangente t comune alle due circonferenze nel punto T. Se la retta s non passa per i centri delle due circonferenze allora la retta t interseca le due rette tangenti t_A, t_B rispettivamente nei punti M, N. Si nota che i due triangoli MAT, NTB sono isosceli rispettivamente su AT e su TB. Poiché sono opposti al vertice gli angoli $\widehat{ATM}, \widehat{BTN}$, si deduce la congruenza degli angoli

$\widehat{TAM}, \widehat{NTB}$ e dunque che le rette t_A, t_B sono parallele perché tagliate dalla trasversale AB formano una coppia di angoli alterni interni uguali.

Se s passa per i centri O_1, O_2 allora le due rette t_A, t_B sono perpendicolari ad s e quindi parallele tra loro.

