

Geometria

Applicazione del secondo teorema dell'angolo esterno Somma degli angoli interni di un triangolo

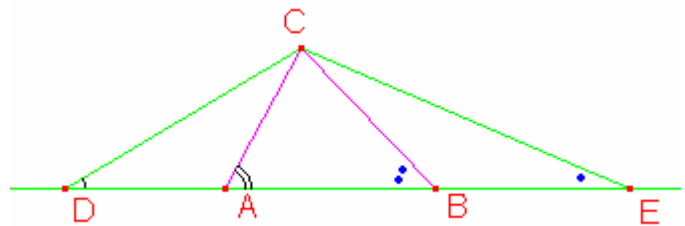
Problema

Considerato il triangolo acutangolo ABC, si prolunghi il lato AB dalla parte di A del segmento AD congruente ad AC e dalla parte di B del segmento BE congruente a BC.

1. Dimostrare che gli angoli $\widehat{ADC}$, $\widehat{BEC}$ sono rispettivamente la metà degli angoli $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$.
2. Dimostrare che l'angolo $\widehat{DCE}$ è ottuso.

Soluzione

- 1 Osserviamo che il triangolo ADC per costruzione ha i lati AD, AC congruenti e dunque è isoscele sulla base DC, pertanto i due angoli ADC, ACD sono tra loro congruenti. Poiché l'angolo BAC è angolo esterno del triangolo ADC, per il secondo teorema dell'angolo esterno si sa che



BAC è congruente alla somma degli angoli interni non adiacenti: $\widehat{BAC} \cong \widehat{ADC} + \widehat{ACD}$ e dunque, essendo $\widehat{ADC} \cong \widehat{ACD}$ possiamo scrivere $\widehat{BAC} \cong 2\widehat{ADC}$.

Stessa dimostrazione si può seguire considerando il triangolo BCE, isoscele su CE e provare che l'angolo ABC è congruente 2BEC.

- 2 Indichiamo con α , β , γ rispettivamente le ampiezze degli angoli $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$ del triangolo ABC. E' noto che la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto: $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Nel punto precedente abbiamo precisato che l'angolo $\widehat{ACD}$ è congruente all'angolo $\widehat{ADC}$ e che ciascuno è pari alla metà dell'angolo $\widehat{BAC}$. La misura di $\widehat{ACD}$ è dunque $\alpha/2$. Con analoghe considerazioni si deduce che l'angolo $\widehat{BCE}$ misura $\beta/2$. Notiamo ora che l'angolo $\widehat{DCE}$ è la somma dei tre angoli $\widehat{DCA}$, $\widehat{ACB}$, $\widehat{BCE}$ e dunque la sua misura è

$$\widehat{DCE} = \widehat{DCA} + \widehat{ACB} + \widehat{BCE} = \frac{\alpha}{2} + \gamma + \frac{\beta}{2} = \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{2} \right) + \frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\gamma}{2}$$

Deduciamo che l'ampiezza dell'angolo $\widehat{DCE}$ è maggiore di un angolo retto e dunque è ottuso.