Poligoni inscritti in una circonferenza

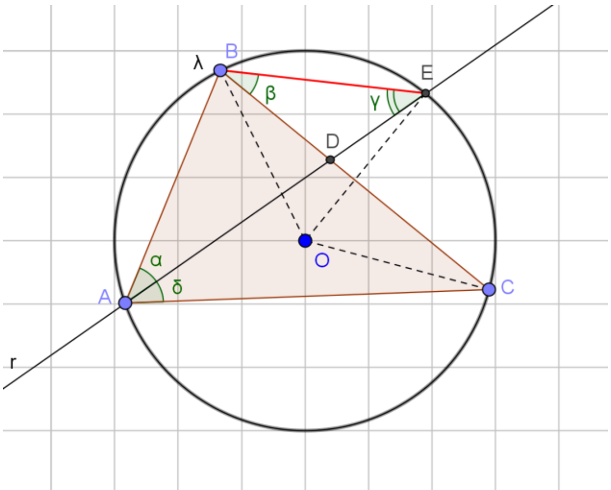
Applicazione della similitudine

Problema

Il triangolo ABC è inscritto in una circonferenza. La retta della bisettrice dell'angolo nel vertice A taglia il lato opposto BC in D e la circonferenza nell'ulteriore punto E. Dimostrare che la corda BE è media proporzionale tra AE e DE.

Dimostrazione

Facciamo riferimento alla figura riportata a lato.



Ipotesi

1) ABC triangolo qualsiasi inscritto in una circonferenza.
2) AD è la bisettrice dell'angolo nel vertice A.

Tesi Provare che AE : BE = BE : DE

a) Osserviamo che la retta della bisettrice AD dell'angolo BAC divide l'arco BC della circonferenza in due archi congruenti. Infatti i due angoli alla circonferenza BAE, CAE, ottenuti dalla bisezione dell'angolo BAC sono tra loro congruenti, dunque hanno congruenti i corrispondenti angoli al centro BOE, COE, quindi sono congruenti gli archi BE, EC. Dalla congruenza degli archi BE, EC deduciamo che risultano congruenti gli angoli alla circonferenza che insistono su di essi; in particolare sono congruenti gli angoli BAE, CBE.
b) Confrontiamo ora i due triangoli ABE, BDE e notiamo che:
   a. hanno l'angolo nel vertice E in comune;
   b. hanno congruenti gli angoli BAE, DBE,

   dunque sono simili per il primo criterio di similitudine con la seguente corrispondenza degli angoli

   $BAE \leftrightarrow DBE$, AEB angolo comune, $ABE \leftrightarrow BDE$;

   ne segue che sussiste la seguente catena di rapporti tra i lati

   BE : DE = AB : BD = AE : BE

   Considerando il primo e l'ultimo rapporto, riscritto dopo aver scambiato i medi con gli estremi, otteniamo la proporzione

   DE : BE = BE : AE

   che permette di concludere che la corda BE è media proporzionale tra corda AE ed il segmento DE.
   C.V.D.