

Applicazione del primo criterio di congruenza di triangoli

Problema

- a) Sia ABC un qualsiasi triangolo scaleno. Si consideri sul prolungamento del lato AC, dalla parte di C, il punto D in modo che $CD \cong BC$ e sul prolungamento di BC, ancora dalla parte di C, il punto E in modo che $CE \cong AC$. Detto P il punto di intersezione della retta r che passa per A e B con la retta s che passa per D ed E, dimostrare che il triangolo BDP è isoscele. Indicare quali sono i triangoli isosceli presenti nella figura ottenuta.
- b) Precisare cosa succede per il punto P se il triangolo ABC è isoscele sulla base AB.

Soluzione

Facciamo riferimento alla costruzione geometrica riportata in Figura 1.

Le **ipotesi** del problema sono:

- 1) ABC è un triangolo scaleno qualsiasi.
- 2) A, C, D punti allineati, con $CD \cong BC$
- 3) B, C, E punti allineati, con $CE \cong AC$
- 4) r retta per A e B; s retta per D ed E; $r \cap s = P$

La **tesi** consiste nel provare che BDP è isoscele.

Analisi della figura e deduzioni

a) Prima parte

Confrontiamo i due triangoli ABC, ECD e notiamo che:

- a. hanno congruenti gli angoli opposti al vertice ACB, ECD.
- b. hanno congruenti per ipotesi i lati AC e CE, BC e CD.

I due triangoli sono congruenti per il primo criterio e quindi avranno ordinatamente congruenti tutti gli elementi omologhi. In particolare sono congruenti gli angoli ABC , CDE .

Consideriamo ora il triangolo BCD ed osserviamo che esso è isoscele sulla base BD perché $CD \cong BC$, quindi sono congruenti i due angoli CBD , CDB .

Per somma di angoli congruenti si deduce che sono congruenti gli angoli ABD, EDB, infatti

$$ABD = ABC + CBD \cong CDE + CDB = EDB$$

Pertanto il triangolo BDP è isoscele sulla base BD.

Seconda parte

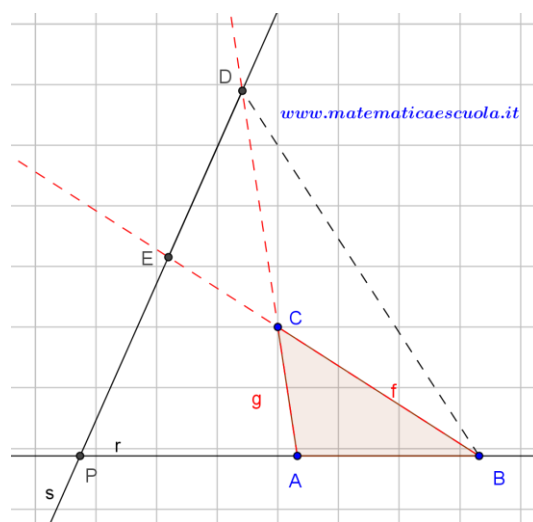


Figura 1

I triangoli isosceli presenti in figura sono tre: BDP e BCD sulla base BD, il triangolo AEP sulla base AE. Che il triangolo AEP sia isoscele si deduce osservando che i segmenti PA, PE sono congruenti perché differenze di segmenti congruenti.

$PA = PB - AB$; $PE = PD - ED$ e abbiamo dal triangolo isoscele BDP segue che $PB \cong PD$, mentre dalla congruenza dei triangoli ABC, CDE si deduce in particolare che $AB \cong ED$.

- b) Se il triangolo ABC è isoscele sulla base AB (vedere Figura 2) e rimangono confermate le congruenze $CD \cong BC$, $CE \cong AC$, risulta isoscele anche il triangolo ECD sulla base ED e dalla congruenza dei due triangoli ABC, ECD, si deduce in particolare che sono congruenti gli angoli EDC, CAB , i quali formano una coppia di angoli alterni interni rispetto alle rette r, s tagliate dalla trasversale AD, dunque queste ultime rette sono parallele e distinte, perciò non hanno punti in comune; in particolare non esiste il punto P (si suol dire che il punto P si trova all'infinito).

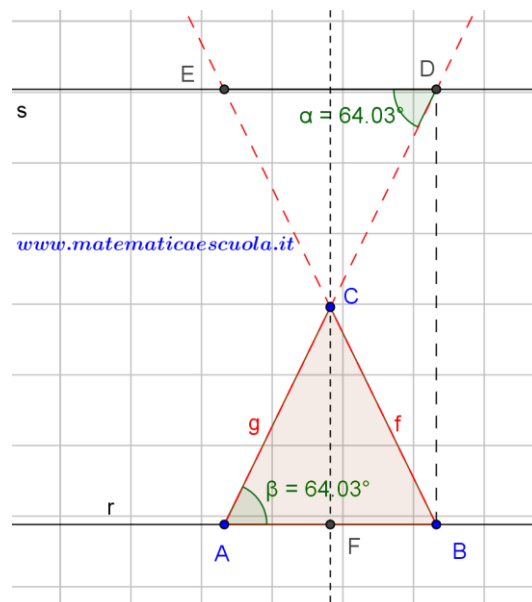


Figura 2- In questa figura è stato rappresentato l'asse del lato AB del triangolo ABC, isoscele su AB. Il vertice C si trova sul predetto asse. Sono indicate le ampiezze dei due angoli EDC, CAB, ma evidentemente il valore è legato alle dimensioni particolari del triangolo ABC.