

Problema sulla circonferenza

Si consideri un triangolo qualsiasi ABC e la circonferenza ad esso inscritta. Tracciata la retta s per il centro della circonferenza parallela al lato AB, siano P e Q le sue intersezioni rispettivamente con i lati AC, BC. Dimostrare che il segmento PQ è congruente alla somma dei segmenti AP, BQ.

Elaborazioni

Facciamo riferimento alla figura riportata a margine nella quale è tracciata la circonferenza λ inscritta al triangolo ABC, la retta s per il centro O della circonferenza e parallela al lato AB e indicato il segmento PQ. Si deve dimostrare che

$$PQ \cong AP + BQ.$$

Consideriamo il triangolo APO e dimostriamo che è isoscele sulla base AO. Infatti, essendo $PO \parallel AB$ la coppia di angoli α, β indicati in figura sono congruenti perché angoli alterni interni rispetto alle parallele PO, AB tagliate dalla trasversale AO.

Inoltre AO è bisettrice dell'angolo formato dai lati AC, AB del triangolo perché detti lati sono tangenti alla circonferenza λ inscritta nel triangolo, dunque α è congruente all'angolo OAP e per transitività sono congruenti gli angoli OAP, AOP, perciò il triangolo APO è isoscele su AO, quindi $AP \cong PO$.

Considerando il triangolo BQO si dimostra che anch'esso è isoscele su BO. Infatti risultano congruenti gli angoli $\delta = ABO$ e $\gamma = BOQ$, in quanto coppia di angoli alterni interni... ed ancora δ è la metà dell'angolo ABC. Deduciamo che $BQ \cong OQ$.

Possiamo scrivere allora

$$PQ = PO + OQ \cong AP + BQ \text{ che è la tesi.} \quad \text{C.V.D.}$$

