

Circonferenza, rette tangenti, triangoli simili

Problema

Si consideri una circonferenza λ di centro O e raggio r ed un punto P esterno alla stessa. Condotti i segmenti tangenti PQ , PT , si consideri il diametro QQ' e lo si prolunghi dalla parte di Q del segmento QO' congruente al raggio della circonferenza.

- 1) Dimostrare che l'angolo $O'PQ$ è un terzo dell'angolo $O'PT$.
- 2) Dimostrare che il triangolo $Q'OT$ è simile al triangolo PQT .
- 3) Nell'ipotesi $\overline{OP} = 2r$ classificare i triangoli PQT , OPO' , OTQ' e determinare le loro aree in funzione del raggio r .

Elaborazioni

Facciamo riferimento alla Figura 1.

Premesse

- 1) Ricordiamo che conducendo da un punto esterno P ad una circonferenza di centro O le due rette tangenti, i segmenti delle due tangenti aventi un estremo in P e l'altro estremo nel punto di contatto della retta tangente con la circonferenza sono tra loro congruenti e inoltre il segmento PO è bisettrice dell'angolo formato dalle due rette tangenti in P , nonché dell'angolo formato dai due raggi OT , OQ .
- 2) Una retta tangente ad una circonferenza e il raggio della stessa che passano dallo stesso punto sono perpendicolari tra loro.

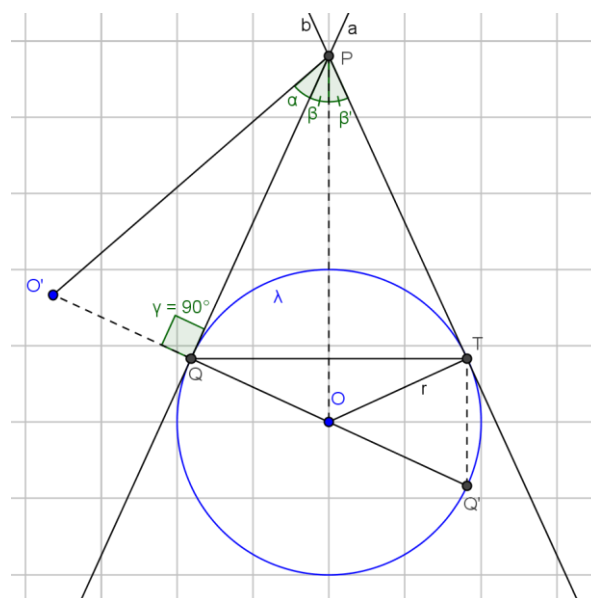


Figura 1

Tesi 1- $O'PQ$ è un terzo dell'angolo $O'PT$

Cominciamo con l'osservare che i due triangoli PQO' , PQO , rettangoli in Q , hanno il cateto PQ in comune e congruenti gli altri due cateti QO' , QO , perché per ipotesi QO' è congruente al raggio della circonferenza. I due triangoli sono dunque congruenti e come elementi omologhi risultano congruenti i due angoli $O'PQ$, OPQ . Risultano anche congruenti le ipotenuse PO' , PO ; pertanto il triangolo $O'PO$ è isoscele su OO' .

Dalla premessa 1) deduciamo che gli angoli OPQ , OPT sono congruenti, dunque risultano congruenti i tre angoli $O'PQ$, OPQ , OPT , perciò l'angolo $O'PQ$ è un terzo dell'angolo $O'PT$.

Tesi 2- I triangoli $Q'OT$, PQT sono simili.

Osserviamo che dall'essere isoscele il triangolo $O'PO$ su OO' , indicata con α l'ampiezza dell'angolo $O'PQ$, le ampiezze dei due angoli adiacenti alla base, $PO'O$, POO' sono $90^\circ - \alpha$. D'altra parte, essendo PO bisettrice anche dell'angolo QOT (vedere premessa 1) anche l'angolo POT misura $90^\circ - \alpha$ e perciò l'angolo QOT misura $180^\circ - 2\alpha$. A questo punto osserviamo che $Q'Q$ è diametro della circonferenza, quindi i punti Q', O, Q sono allineati e quindi l'angolo $Q'OT$ è adiacente all'angolo QOT , perciò la sua ampiezza è 2α .

Ancora, il triangolo $Q'OT$ è isoscele su $Q'T$ (perché OQ' , OT sono raggi) e confrontato con il triangolo PQT , isoscele su QT , notiamo che hanno gli angoli nei vertici O, P congruenti, quindi sono congruenti anche gli angoli alle basi $Q'T, QT$. Concludiamo che i due triangoli hanno ordinatamente congruenti gli i tre angoli e quindi per il primo criterio di similitudine sono simili.

Tesi 3- Classificazione dei triangoli PQT , OPO' , OTQ' e loro aree in funzione del raggio r .

Proviamo che con l'ipotesi aggiuntiva $\overline{OP} = 2r$ i triangoli in questione sono equilateri.

Facciamo riferimento alla Figura 2.

- 1) I triangoli rettangoli POT , POQ hanno l'ipotenusa doppia dei rispettivi cateti OT, OQ , quindi gli angoli acuti OPT, OPQ misurano 30° . Risulta dunque anche $\overline{PT} = \overline{PQ} = r\sqrt{3}$.
- 2) Il triangolo PQT , isoscele su QT , ha l'angolo nel vertice P di 60° , quindi il triangolo è equilatero. Ricordando che l'area di un triangolo equilatero il cui lato misuri l è $S = \frac{l^2}{4}\sqrt{3}$ possiamo

$$\text{affermare che } \text{Area}(PQT) = \frac{\overline{PT}^2}{4}\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2.$$

- 3) Anche il triangolo isoscele OPO' ha l'angolo nel vertice P di 60° , quindi anch'esso è equilatero e

$$\text{i suoi lati misurano } 2r. \text{ L'area del triangolo è } \text{Area}(OPO') = \frac{\overline{OP}^2}{4}\sqrt{3} = \sqrt{3}r^2.$$

- 4) Per quanto sopra anche il triangolo OTQ' è equilatero (ricordiamo che nella dimostrazione della tesi 1 abbiamo precisato che questo triangolo è simile al triangolo PQT) e i suoi lati misurano r .

$$\text{Concludiamo che } \text{Area}(OTQ') = \frac{r^2}{4}\sqrt{3}.$$

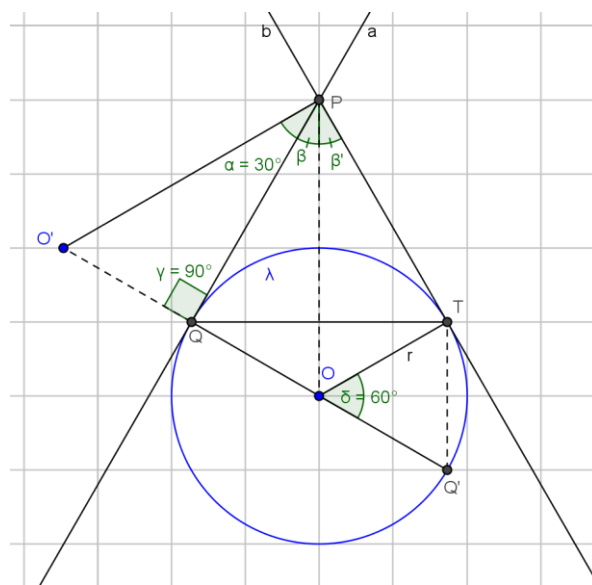


Figura 2