Quesiti di geometria analitica
(richiesti da un'utente della rete)

<<Testo dei quesiti

a) (Date le) due rette di equazioni 2x +3y-1=0, x-2y+3=0, determinare la retta del fascio parallela alla retta (che passa) per i punti A(7;-2), B(-5;3)

b) (In relazione al fascio determinato dalle) due rette di equazione 2x +3y-1=0, x-2y+3=0, determinare la retta del fascio passante per il punto A(7;-2)

c) Date le rette di equazioni x+3y-4=0, 2x-y-1=0 scrivere un' equazione del fascio proprio individuato dalle due rette.

d) Dati i punti A(1;1) e V(1/2;0) determinare l' equazione della parabola passante per A con vertice nel punto V.

Fine del testo>>

Premessa sui fasci di rette

L'equazione del fascio di rette individuato da due rette r, s si scrive combinando linearmente le equazioni delle due rette assegnate. Posto

$r: 2x+3y-1=0$ e $s: x-2y+3=0$,

l'equazione del fascio individuato è

$F: \lambda(2x+3y-1)+\mu(x-2y+3)=0$,

con λ e μ parametri reali e $(\lambda ; \mu)\neq(0;0)$.

Le due rette r, s sono dette le rette generatrici del fascio.

Se le rette generatrici sono incidenti allora il **fascio** è **proprio** e al variare dei valori dei parametri si ottengono le equazioni di tutte le rette del fascio; queste rette passeranno tutte dal punto comune ad r e s.

Se le rette generatrici sono tra loro parallele allora il **fascio** è **improprio** e al variare dei valori dei parametri si ottengono le equazioni di tutte le rette del fascio, che saranno parallele a quelle assegnate.

Si può scrivere l'equazione del fascio utilizzando un solo parametro tramite una delle seguenti forme

$F_1: 2x+3y-1+k(x-2y+3)=0$, con $k\in\mathbb{R}$,

$F_2: k(2x+3y-1)+x-2y+3=0$, con $k\in\mathbb{R}$.

Si osservi, però, che tramite la F_1 al variare di k si ottengono le equazioni di tutte le rette del fascio tranne l'equazione della retta s (detta retta limite del fascio); così, dall'equazione di F_2, al variare del parametro si ottengono le equazioni di tutte le rette del fascio tranne quella della retta r (appunto la retta limite). La rappresentazione del fascio tramite un'equazione contenente un solo parametro se da una parte è più snella e facile da gestire dall'altra perde la possibilità di ottenere la totalità delle rette del fascio, infatti ne manca una e potrebbe capitare che nell'esercizio da affrontare sia richiesta proprio quella retta mancante. Certamente lo studioso sa riconoscere quando si verifica questa eventualità e come gestirla caso per caso.

Ciò premesso affrontiamo gli esercizi scrivendo le equazioni dei fasci che saranno richiesti utilizzando un solo parametro.

Soluzione dei quesiti

a) L'equazione del fascio di rette è

$F_1: 2x+3y-1+k(x-2y+3)=0$, con $k\in\mathbb{R}$

Che si può scrivere orinandola rispetto alla variabili x, y come segue

$F_1 : (2+k)x+(3-2k)y+3k-1=0$.

Si richiede l'equazione della retta t del fascio parallela alla retta passante per i punti A(7;2), B(-5;3). Si risolve il problema trovando l'espressione del coefficiente angolare della generica retta del fascio ed uguagliandolo al valore del coefficiente angolare della retta [A;B]. Si ha:

$A(7;-2), B(-5;3) \to \ m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -\dfrac{5}{12}$;

coefficiente angolare della generica retta del fascio: $m' = \dfrac{k+2}{2k-3}$;

condizione di parallelismo: $\dfrac{k+2}{2k-3} = -\dfrac{5}{12} \to \ k = -\dfrac{9}{22}$

L'equazione della retta richiesta è

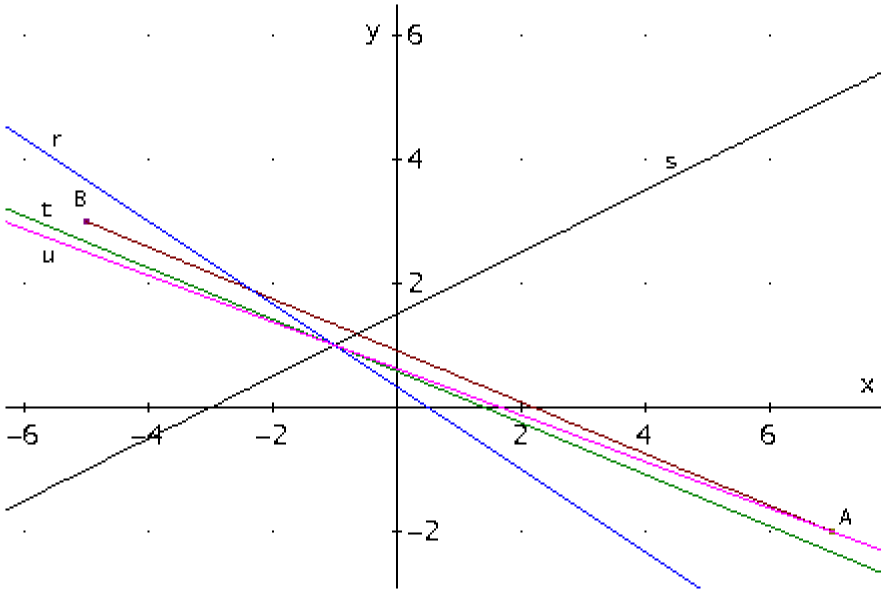
$t : 5x+12y-7=0$

b) Ricerchiamo ora la retta del fascio passante per

Si trova il valore del parametro imponendo che le coordinate del punto $A(7;-2)$ verifichino l'equazione del fascio. Si ha: $14-6-1+k(7+4+3)=0 \to k=-\dfrac{1}{2}$.L'equazione della rette u cercata è

$u : 3x+8y-5=0$

Nella figura che segue sono rappresentate le rette generatrici del fascio e le due t ed u determinate.



c) **Risposta**

Un'equazione del fascio individuato dalle due rette è quella seguente

$x+3y-4+k(2x-y-1)=0$

d) Il quesito non è ben posto. Infatti, è necessario stabilire se la parabola ha l'asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate oppure all'asse delle ascisse.

Nell'ipotesi che l'asse di simmetria sia parallelo all'asse delle ordinate l'equazione della parabola è del tipo $y = ax^2+bx+c$ ed imponendo che abbia il vertice V assegnato e che passi dal punto A(1;1) si determinano i valori dei coefficienti a=4, b=-4, c=1. L'equazione della parabola è $y = 4x^2-4x+1$.

Nell'ipotesi che la parabola abbia asse di simmetria parallelo all'asse delle ascisse allora l'equazione è del tipo $x = ay^2 + by + c$ ed imponendo le condizioni assegnate si trova l'equazione seguente $x = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}$.

Nella figura che segue sono rappresentate entrambe le parabole, il loro vertice V ed il punto A.