Geometria analitica
(sulla parabola e sulla retta)

a) In un piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale xOy scrivere l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate, passante per l'origine O degli assi e per i punti A(-1;-1) e B(-3;1).

b) Scrivere l'equazione della retta **s** passante per il punto P della parabola avente ascissa $x=-\frac{1}{2}$ e coefficiente angolare -1.

c) Determinare la misura della corda PQ staccata dalla parabola sulla retta S.

d) Detto V il vertice della parabola, trovare l'area del triangolo VPQ.

Soluzione

a) La parabola ha equazione della forma $y=ax^2+bx+c$. Per determinare i valori dei parametri a, b, c si devono imporre le condizioni di passaggio della curva dai tre punti O(0;0), A(-1;-1) e B(-3;1), ottenendo un sistema di tre equazioni di primo grado nelle incognite a, b, c; risolvendo il sistema si trovano i valori richiesti.

$$\begin{cases} c=0 \\ a-b+c=-1 \\ 9a-3b+c=1 \end{cases} \rightarrow \; a=\frac{2}{3},\; b=\frac{5}{3},\; c=0.$$

L'equazione della parabola è: $y=\frac{2}{3}x^2+\frac{5}{3}x$.

b) Il punto P della parabola avente ascissa x=-1/2 ha ordinata

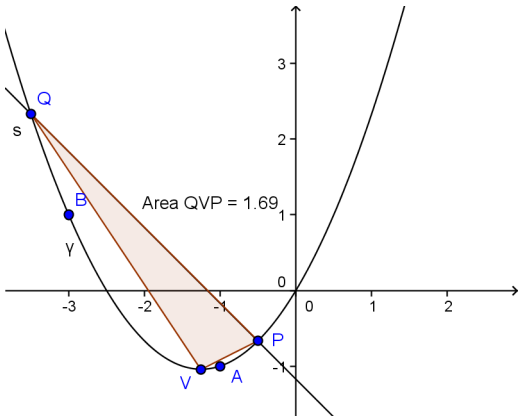
$$y=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{2}{3} \quad P\left(-\frac{1}{2};-\frac{2}{3}\right)$$

Equazione della retta s.

$$s: y+\frac{2}{3}=-\left(x+\frac{1}{2}\right) \rightarrow \qquad s: y=-x-\frac{7}{6}$$

c) Risolvendo il sistema formato dall'equazione della retta s e dall'equazione della parabola si trovano le coordinate dei due punti P e Q. Si ha $Q\left(-\frac{7}{2};\frac{7}{3}\right)$. La misura della corda PQ è

$$\overline{PQ}=\sqrt{\left(-\frac{7}{2}+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{7}{3}+\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{18+18}=3\sqrt{2}$$



d) Il vertice della parabola è il punto $V\left(-\frac{5}{4};-\frac{25}{24}\right)$.

Per il calcolo dell'area del triangolo VPQ si può utilizzare la formula del determinante del terzo ordine.

$$Area(VPQ)=\left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_V & y_V & 1 \\ x_P & y_P & 1 \\ x_Q & y_Q & 1 \end{vmatrix}\right| =$$

$$\frac{1}{2}\left|\left(x_V y_P+y_V x_Q+x_P y_Q\right)-\left(x_Q y_P+y_Q x_V+x_P y_V\right)\right|=\frac{27}{16}$$