Parabola e retta

Parabola, retta , distanza punto-retta, perimetro e area per triangoli inscritti in un segmento parabolico

Problema

1. In un riferimento cartesiano xOy si consideri la parabola γ di equazione $\gamma : x^2 - 4x + 2y = 0$; se ne determini il vertice V, l'equazione dell'asse di simmetria, i punti di intersezione con gli assi cartesiani. Si rappresenti la parabola.
2. Scrivere l'equazione della retta s passante per il punto A della parabola avente ascissa unitaria e parallela alla bisettrice del secondo e quarto quadrante. Si determini l'ulteriore punto B comune alla retta s e alla parabola γ.
3. Determinare la misura della corda AB e il perimetro del triangolo avente per vertici i punti A, B e il vertice V.
4. Determinare l'area del triangolo ABV e quella del triangolo avente area massima inscritto nel segmento parabolico avente base AB.

Risoluzione

1. La parabola ha equazione esplicita $\gamma : y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$, asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate e concavità rivolta nel verso delle ordinate negative e passa dall'origine degli assi coordinati perché l'equazione manca del termine noto; il vertice della parabola è $V(2;2)$. La parabola interseca l'asse delle ascisse nell'ulteriore punto P(4;0) e non ha altri punti in comune con l'asse delle ordinate. L'asse di simmetria della parabola è la retta :x=2. La rappresentazione grafica della parabola è in Figura 1.
2. Il punto A della parabola avente ascissa x=1 ha ordinata y=3/2. Poiché la bisettrice dei quadranti 2° e 4° ha equazione y=-x, quindi ha coefficiente angolare m=-1, la retta s passante per A e parallela alla suddetta bisettrice ha equazione:
$$s : y - \frac{3}{2} = -(x-1) \rightarrow s : y = -x + \frac{5}{2}.$$
3. La misura della corda AB è
$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} =$$
$$\sqrt{(5-1)^2 + \left(-\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\right)^2} = 4\sqrt{2}$$

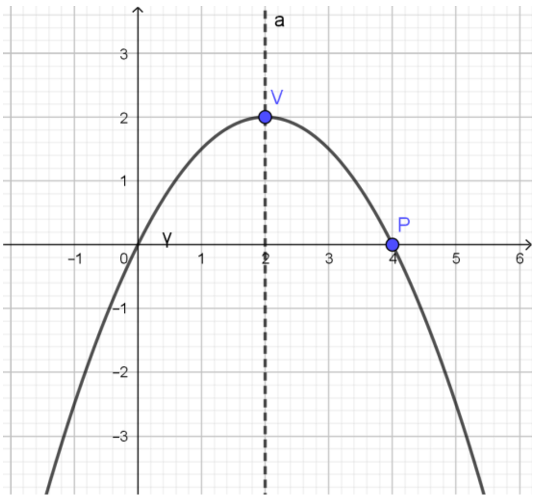

Figura 1

Per il perimetro del triangolo ABV occorrono le misure dei suoi lati. Risulta

$$\overline{AV} = \sqrt{(x_V - x_A)^2 + (y_V - y_A)^2} = \sqrt{(2-1)^2 + \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2};$$

$$\overline{BV} = \sqrt{(2-5)^2 + \left(2 + \frac{5}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{13}}{2}$$

Il perimetro del triangolo ABV è $2p(ABV) = \overline{AB} + \overline{BV} + \overline{AV} = 4\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{13}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$

In Figura 2 si rilevano gli elementi geometrici elaborati nei primi tre quesiti.

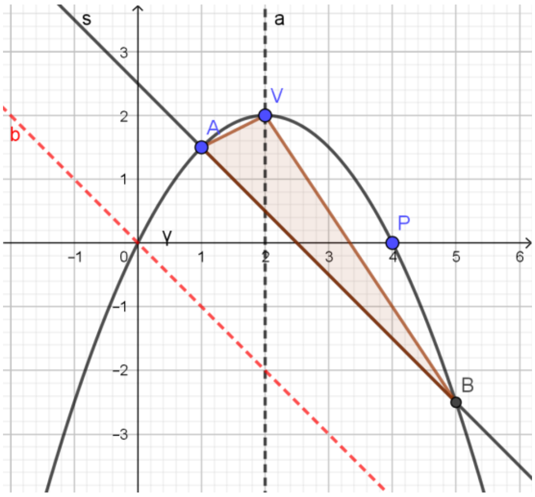

Figura 2

4. Per l'area del triangolo ABV assumiamo come base il lato AB e determiniamo la misura della relativa altezza tramite la distanza del vertice V dalla retta s (sulla quale giacciono i punti A,B).

Osserviamo che l'equazione della retta s in forma implicita è $s: 2x + 2y - 5 = 0$. Dalla formula della distanza di un punto da una retta ricaviamo:

$$d(V;s) = \frac{|2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 - 5|}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

$$Area(ABV) = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot d(V;s) = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}} = 3$$

Ricerca del triangolo avente area massima inscritto nel segmento parabolico di base AB

Il triangolo cercato deve avere come lato fisso il segmento AB e come punto **C**, terzo vertice, quello appartenente all'arco $\overset{\frown}{AB}$ di parabola avente distanza massima dalla base AB; questo punto si ottiene determinando il punto di contatto tra la parabola e la retta **t** parallela alla base AB che è tangente alla parabola stessa. Poiché questa retta è parallela alla bisettrice dei quadranti 2° e 4° la sua equazione è della forma : $y=-x+k$, con k parametro da determinare.

Per trovare il valore corrispondente di k si imposta il sistema di equazioni formato dall'equazione della parabola in oggetto e dall'equazione parametrica $y=-x+k$, imponendo che l'equazione risolvente ottenuta abbia discriminante nullo perché le sue radici devono essere coincidenti.

$$\begin{cases} y = -x + k \\ y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x \end{cases} \rightarrow -\frac{1}{2}x^2 + 2x = -x + k \rightarrow$$

$x^2 - 6x + 2k = 0$, la condizione di tangenza è (C.d. T.)

$\Delta = 0 \rightarrow 36 - 8k = 0 \rightarrow k = \frac{9}{2}$.

La retta tangente **t** ha equazione $t: y = -x + \frac{9}{2}$ e il punto C in cui tocca la parabola γ ha ascissa x=3; $C\left(3; \frac{3}{2}\right)$.

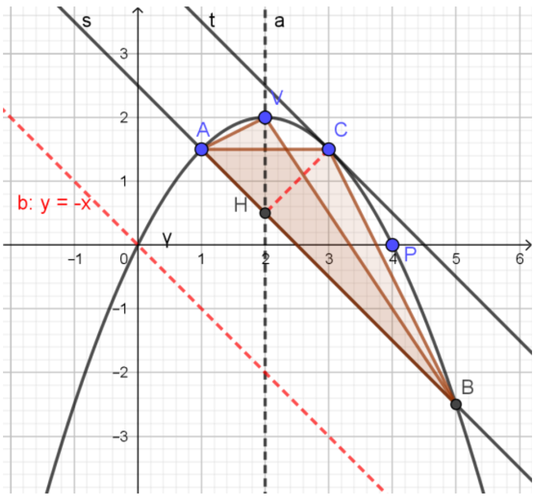

Figura 3

Troviamo ora la misura della distanza del punto C dalla retta s; il valore trovato sarà la misura dell'altezza del triangolo relativa alla base AB.

$$d(C;s)=\frac{\left|2\cdot 3+2\cdot\frac{3}{2}-5\right|}{\sqrt{2^2+2^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}$$

Area del triangolo ABC

$$Area(ABC)=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot d(C;s)=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}=4$$