Sulla parabola

(rette tangenti, normale alla parabola, segmento parabolico)

Problema

Q1) Scrivere l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate tangente alla retta $t: x-3y-4=0$ nel suo punto T di ordinata -1 e passante per il punto P(0;2).

Q2) Scrivere l'equazione della normale *n* alla parabola nel punto T e sia A l'ulteriore punto comune con la parabola.

Q3) La retta tangente *t* interseca l'asse delle y in B. Determinare l'area del triangolo di vertici A, T, B.

Q4) Determinare l'area del segmento parabolico delimitato dalla retta normale *n* e dalla parabola.

Risoluzione

Q1) L'equazione della parabola è del tipo $\gamma: y=ax^2+bx+c$. Imponendo il passaggio dal punto T e dal punto P(0;2) si eliminano due dei tre parametri a, b, c; il terzo parametro si troverà imponendo la condizione di tangenza con la retta t.

$T: y=-1 \rightarrow x=1;\ T(1;-1);\qquad P\in\gamma \rightarrow c=2;\ T(1;-1)P\in\gamma \rightarrow a+b+2=-1 \rightarrow b=-3-a$

L'equazione della parabola è del tipo $\gamma: y=ax^2-(a+3)x+2$

Condizione di tangenza

$$\begin{cases}\gamma: y=ax^2-(a+3)x+2\\ t: x-3y-4=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}y=ax^2-(a+3)x+2\\ x-3\left(ax^2-(a+3)x+2\right)-4=0\end{cases} \rightarrow 3ax^2-(3a+10)x+10=0$$

Imponiamo che il discriminate dell'equazione ottenuta sia nullo: $\Delta=(3a+10)^2-120a=0$, da cui

$(3a-10)^2=0$, quindi $a=\frac{10}{3}$. L'equazione della parabola è $\gamma: y=\frac{10}{3}x^2-\frac{19}{3}x+2$.

Q2) Equazione della normale n alla parabola in T(1;-1)

Il coefficiente angolare della normale è l'antireciproco del coefficiente angolare della retta t, quindi m'=-3.

$n: y+1=-3(x-1) \rightarrow n: y=-3x+2$

Ricerca delle coordinate del punto A

Si risolve il sistema tra l'equazione della parabola e l'equazione della normale in T.

$\begin{cases}\gamma: y=\frac{10}{3}x^2-\frac{19}{3}x+2\\ n: y=-3x+2\end{cases}$, L'equazione risolvente è $x^2-x=0$, le cui radici sono $x_1=0, x_2=1$.

Il punto richiesto è $A(0;2)$.

Q3) Intersezione della retta tangente t con l'asse y

$\begin{cases} t: x-3y-4=0 \\ asse_y: x=0 \end{cases}$, da cui $B\left(0;-\dfrac{4}{3}\right)$.

Area del triangolo ATB

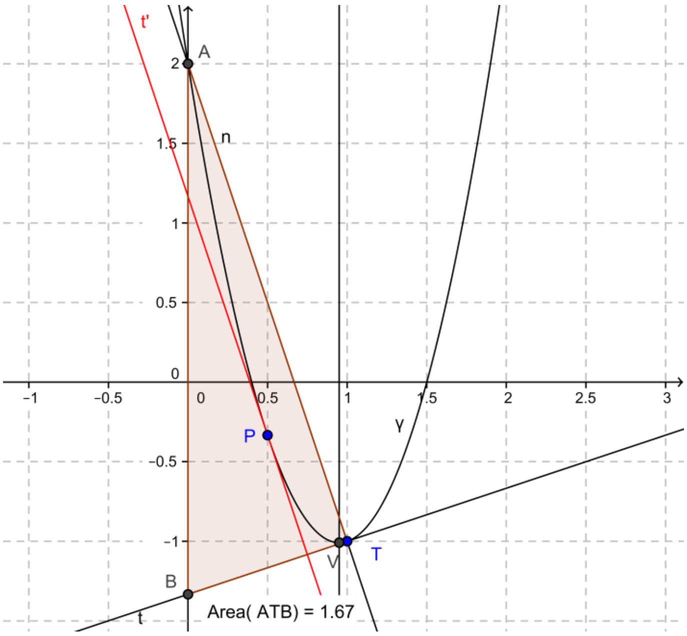
Osserviamo che il triangolo ATB è rettangolo in T e la sua area si può determinare velocemente assumendo come base l'ipotenusa AB, che misura

$$\overline{AB}=|y_A-y_B|=2+\frac{4}{3}=\frac{10}{3};$$

la misura dell'altezza h relativa all'ipotenusa è uguale all'ascissa del punto T, dunque $h=1$.

Il valore dell'area richiesta è:

$$Area(ATB)=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot h=\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{3}\cdot 1=\frac{5}{3}$$



Q4) Segmento parabolico determinato dalla retta normale

Equazione della retta tangente t' alla parabola parallela alla normale

$t': 18x+6y-7=0$

Punto di contatto tra t' e la parabola:

$P\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{3}\right)$

Area del segmento parabolico

Il valore dell'area del segmento parabolico è pari ai due terzi dell'area del rettangolo circoscritto allo stesso. Trovate la misura della base AT e la distanza h tra detta base e la tangente t' alla parabola il valore dell'area richiesta è

$$Area_{Seg\_parab}=\frac{2}{3}\overline{AT}\cdot h.$$

Risulta:

$$\overline{AT}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10};\ h=d(P;n)=\frac{\left|3\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-2\right|}{\sqrt{10}}=\frac{5}{6\sqrt{10}}, \text{ quindi } Area_{Seg\_parab}=\frac{2}{3}\sqrt{10}\cdot\frac{5}{6\sqrt{10}}=\frac{5}{9}$$