Fascio di parabole con un solo punto base

Problema

Considerato il fascio di parabole di equazione $F:(k+1)x^2-2kx-y+k=0$ risolvere i quesiti che seguono.

1) Determinare le equazioni delle curve generatrici del fascio e stabilirne il tipo.
2) Classificare il fascio e determinare gli eventuali punti base.
3) Riconosciuto che si tratta di un fascio di curve tangenti nel punto T(1;1), rappresentare le parabole del fascio λ_1, λ_2, λ_3 corrispondenti ai valori k=0, k=1, k=-2.
4) Detta t la retta tangente comune alle parabole del fascio, scrivere l'equazione della normale n comune alle curve del fascio nel punto base T e determinare il secondo punto in cui n interseca ciascuna delle parabole λ_1, λ_2, λ_3 distinto da T. Calcolare le aree dei segmenti parabolici delimitati dalla normale n con le parabole λ_1, λ_2, λ_3 .

Elaborazioni

1) Scriviamo l'equazione del fascio separando i termini contenenti il parametro k dagli altri:

   $F:k\left(x^2-2x+1\right)+x^2-y=0;$ le curve generatrici sono

   a. $g_1:(x-1)^2=0$, che è la retta doppia di equazione $x-1=0$;
   b. $g_2:x^2-y=0$

   La retta doppia è una parabola degenere. Le due curve generatrici hanno in comune il punto T(1;1), che va contato due volte.

2) T (1;1) è l'unico punto base del fascio e le parabole del fascio sono tra loro tangenti in T. Il fascio ammette come curva degenere anche la retta che si ottiene per k=-1, quindi la retta t:2x-y-1=0.
3) Le parabole del fascio corrispondenti ai valori indicati k=0, k=1, k=-2 ordinatamente sono:

   $k=0\to\lambda_1:y=x^2;\quad k=1\to\lambda_2:y=2x^2-2x+1;\ k=-2\to\lambda_3:y=-x^2+4x-2$

4) La retta t:2x-y-1=0 è tangente comune a tutte le parabole del fascio e conseguentemente la retta ad essa perpendicolare in T è normale ad ogni parabola del fascio in T; quest'ultima retta è la retta n cercata. L'equazione della normale è

   $$n:y-1=-\frac{1}{2}(x-1)\to n:x+2y-3=0.$$

   Punti di intersezione della normale n con le parabole λ_1, λ_2, λ_3 .

   $$\begin{cases} n:x+2y-3=0 \\ \lambda_1:y=x^2 \end{cases}\to A\left(-\frac{3}{2};\frac{9}{4}\right), T(1;1);$$

$$\begin{cases} n: x+2y-3=0 \\ \lambda_2: y=2x^2-2x+1 \end{cases} \rightarrow B\left(-\frac{1}{4};\frac{13}{8}\right),\ T(1;1);$$

$$\begin{cases} n: x+2y-3=0 \\ \lambda_3: y=-x^2+4x-2 \end{cases} \rightarrow C\left(\frac{7}{2};-\frac{1}{4}\right), T(1;1)$$

Aree dei segmenti parabolici

Per calcolare l'area di ciascun segmento parabolico si determina l'equazione della retta tangente alla rispettiva parabola che risulta parallela alla retta n. Osserviamo che le tre rette tangenti appartengono al fascio improprio di rette individuato dalla retta n, dunque le loro equazioni si ottengono dalla forma algebrica x+2y+q=0 per opportuni valori del paramero q. Per ottenere i tre valori del parametro q si mette a sistema l'equazione del fascio improprio successivamente con ciascuna delle equazioni delle tre parabole e si impone che l'equazione risolvente del corrispondente sistema abbia discriminante nullo. Riportiamo i risultati, lasciando le elaborazioni al lettore. Risulta:

$t_1: 8x+16y+1=0$ tangente alla parabola λ_1;

$t_2: 16x+32y-23=0$ tangente alla parabola λ_2;

$t_3: 8x+16y-49=0$ tangente alla parabola λ_3.

Osserviamo che per determinare le altezze dei tre segmenti parabolici si possono considerare le distanze del punto T da ciascuna delle tre rette tangenti t_1, t_2, t_3 e risulta:

$$d(T;t_1)=\frac{|8+16+1|}{\sqrt{8^2+16^2}}=\frac{25}{8\sqrt{5}};\ d(T;t_2)=\frac{|16+32-23|}{\sqrt{16^2+32^2}}=\frac{25}{16\sqrt{5}};\ d(T;t_3)=\frac{|8+16-49|}{\sqrt{8^2+16^2}}=\frac{25}{8\sqrt{5}}$$

Le basi dei tre segmenti parabolici sono i segmenti AT, BT, CT le cui misure sono:

$$\overline{AT}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{4}\right)^2}=\frac{5}{4}\sqrt{5};\ \overline{BT}=\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2+\left(\frac{5}{8}\right)^2}=\frac{5}{8}\sqrt{5};\ \overline{CT}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{4}\right)^2}=\frac{5}{4}\sqrt{5}$$

Area del segmento parabolico di base AT

$$S_1=\frac{2}{3}\cdot\overline{AT}\cdot d(T;t_1)=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}\sqrt{5}\cdot\frac{25}{8\sqrt{5}}=\frac{125}{48}$$

Area del segmento parabolico di base BT

$$S_2=\frac{2}{3}\cdot\overline{BT}\cdot d(T;t_2)=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{8}\sqrt{5}\cdot\frac{25}{16\sqrt{5}}=\frac{125}{192}$$

Area del segmento parabolico di base CT

$$S_3=\frac{2}{3}\cdot\overline{CT}\cdot d(T;t_3)=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}\sqrt{5}\cdot\frac{25}{8\sqrt{5}}=\frac{125}{48}$$

Segue la figura.