# Fascio di parabole tangenti

## Problema

Considerato il fascio di parabole di equazione $F: kx^2+2(k-1)x+y+k-1=0$ risolvere i quesiti che seguono.

1) Determinare le equazioni delle curve generatrici del fascio.
2) Classificare il fascio precisando quali siano le sue curve degeneri e se ammette punti base.
3) Determinare le parabole del fascio che staccano sulla bisettrice s del secondo e quarto quadrante una corda di lunghezza $\frac{16}{5}\sqrt{2}$.
4) Riconosciuto che esistono due parabole del fascio che verificano la proprietà indicata nel precedente punto, determinare l'area di ciascuno dei segmenti parabolici individuati dalle suddette parabole con la bisettrice s.
5) Realizzare una figura contenente gli elementi geometrici elaborati.

## Elaborazioni

1) Scritta l'equazione del fascio nella forma $F: k(x+1)^2-2x+y-1=0$, si riconosce che le curve generatrici sono

   a. $g_1:(x+1)^2=0$, che è la retta doppia di equazione $x+1=0$;

   b. $g_2: 2x-y+1=0$

   Entrambe le curve generatrici sono parabole degeneri.

2) Mettendo a sistema le equazioni delle curve generatrici si ottiene il sistema

   $\begin{cases}(x+1)^2=0\\ 2x-y+1=0\end{cases}$, soddisfatto da $\begin{cases}x=-1\\ y=-1\end{cases}$, che è soluzione doppia.

   Il punto **T(-1;-1) è l'unico punto base del fascio** e poiché va contato due volte si deduce che tutte le parabole del fascio saranno tangenti tra loro in detto punto.

   Osservazione

   La retta $g_2: 2x-y+1=0$ rappresenta la tangente comune a tutte le parabole del fascio in T.

   **Curve degeneri del fascio**

   Abbiamo già precisato che le curve $g_1$, $g_2$ sono curve degeneri per il fascio; possiamo aggiungere che la retta doppia $g_1$ rappresenta anche la curva limite del fascio e la sua equazione non può essere ottenuta per alcun valore reale del parametro. Il fascio non ammette altre curve degeneri.

3) Strategia risolutiva

La bisettrice del 2° e 4° quadrante è s:y=-x. Per rispondere al quesito occorre mettere a sistema l'equazione del fascio con quella della retta s, studiare il sistema di equazioni e precisare sotto quali condizioni per il parametro k esistono soluzioni. Si dovrà richiedere che il sistema ammetta due soluzioni distinte, che saranno le coordinate dei punti comuni $P_1$, $P_2$ comuni alle due curve ed imporre che la misura del segmento $P_1P_2$ sia quella indicata; la condizione algebrica ottenuta permetterà di determinare i corrispondenti valori del parametro k.

$$\begin{cases} y=-x \\ kx^2+2(k-1)x+y+k-1=0 \end{cases}$$ Il sistema ammette come equazione risolvente

$$kx^2+(2k-3)x+k-1=0 \qquad (3.1)$$

Che ammette soluzioni reali se e solo se il suo discriminante è non negativo:

$\Delta=(2k-3)^2-4k(k-1)\geq 0$, da cui $9-8k\geq 0$, quindi $k\leq\frac{9}{8}$; in particolare, volendo ottenere soluzioni reali e distinte dovrà risultare $k<\frac{9}{8}$. L'equazione (3.1) ammette come radici

$x=\frac{3-2k\pm\sqrt{9-8k}}{2k}$ e i due punti comuni tra la retta e la generica curva del fascio sono

$$P_1\left(\frac{3-2k-\sqrt{9-8k}}{2k};-\frac{3-2k-\sqrt{9-8k}}{2k}\right), \quad P_2\left(\frac{3-2k+\sqrt{9-8k}}{2k};-\frac{3-2k+\sqrt{9-8k}}{2k}\right).$$

Misura del segmento $P_1P_2$

$$\overline{P_1P_2}=\sqrt{2\left(\frac{3-2k+\sqrt{9-8k}}{2k}-\frac{3-2k-\sqrt{9-8k}}{2k}\right)^2}=\sqrt{2}\cdot\left|\frac{\sqrt{9-8k}}{k}\right|$$

**Condizione per la lunghezza del segmento $P_1P_2$**

$\overline{P_1P_2}=\frac{16}{5}\sqrt{2}$, che diventa $\sqrt{2}\cdot\left|\frac{\sqrt{9-8k}}{k}\right|=\frac{16}{5}\sqrt{2}$, quindi

$$\left(5\sqrt{9-8k}\right)^2=(16k)^2\rightarrow 16^2k^2+200k-225=0$$

Le radici dell'equazione sono $k_1=-\frac{45}{32}$, $k_2=\frac{5}{8}$. Esistono dunque due parabole del fascio che verificano la proprietà richiesta e sono:

$k_1=-\frac{45}{32}\rightarrow\lambda_1: y=2x+1+\frac{45}{32}(x+1)^2\rightarrow\lambda_1: y=\frac{45}{32}x^2+\frac{77}{16}x+\frac{77}{32}$; vertice $V_1\left(-\frac{77}{45};-\frac{77}{45}\right)$;

$$k_2=\frac{5}{8}\to\lambda_2: y=2x+1-\frac{5}{8}(x+1)^2\to\lambda_2: y=-\frac{5}{8}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{3}{8};\text{ vertice } V_2\left(\frac{3}{5};\frac{3}{5}\right).$$

**Punti comuni delle parabole con la bisettrice s** (omettiamo i calcoli)

$$\lambda_1\cap s=\left\{P_1\left(-\frac{7}{15};\frac{7}{15}\right),P_2\left(-\frac{11}{3};\frac{11}{3}\right)\right\};$$

$$\lambda_2\cap s=\left\{P_1'\left(-\frac{1}{5};\frac{1}{5}\right),P_2'(3;-3)\right\}$$

4) Aree dei segmenti parabolici

Per il calcolo dell'area di ciascun segmento parabolico si deve determinare la retta tangente alla parabola corrispondente che risulta parallela alla bisettrice s, nonché la distanza tra detta tangente e la stessa bisettrice; la distanza rappresenta l'altezza del relativo segmento parabolico. Riportiamo solo le elaborazioni relative alla parabola $\lambda_2$.

**Ricerca della retta tangente**

$$\begin{cases}\lambda_2: y=-\frac{5}{8}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{3}{8}\\ y=-x+q\end{cases}\to 5x^2-14x+8q-3=0\to\frac{\Delta}{4}=49-5(8q-3)=0\to q=\frac{8}{5}$$

La retta tangente cercata è: $t_2: y=-x+\frac{8}{5}$.

**Altezza del segmento parabolico**

$$d(P'_1;t_2)=\frac{\left|-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{8}{5}\right|}{\sqrt{2}}=\frac{8}{5\sqrt{2}}$$

**Area del segmento parabolico** formato da s e da $\lambda_2$

$$Area_2=\frac{2}{3}\cdot\overline{P'_1P'_2}\cdot d(P'_1;t_2)=$$
$$\frac{2}{3}\cdot\frac{16}{5}\sqrt{2}\cdot\frac{8}{5\sqrt{2}}=\frac{256}{45}$$

5) La figura è a margine.