Sulla parabola e il segmento parabolico

Problema

Nel piano dotato di un sistema di riferimento cartesiano xOy si consideri il fascio di curve di equazione $F: y=(k-1)x^2+hx$.

Quesiti

1) Determinare per quali valori dei parametri k , h si ottiene la parabola λ tangente alla retta t:x-2y-4=0 nel punto T di ascissa x=2.
2) Determinare l'area del segmento parabolico individuato dalla precedente parabola e dalla retta t' parallela alla retta t e passante per il punto A appartenente alla parabola avente ascissa -3/2.
3) Indicati con B il secondo punto di intersezione di t' con la parabola e V il vertice della stessa curva, calcolare il rapporto fra l'area del triangolo AVB e l'area del segmento parabolico considerato prima.
4) Realizzare una figura contenente tutti gli elementi geometrici elaborati.

Elaborazioni

1) Strategia risolutiva

La parabola λ cercata deve passare dal punto T della retta in cui è tangente alla stessa; determinando l'ordinata di T ed imponendo che le coordinate di questo punto verifichino l'equazione del fascio di curve si ottiene una prima condizione algebrica cui devono soddisfare i due parametri; la seconda condizione si dedurrà impostando il sistema tra l'equazione del fascio di curve e quella della retta t, trovando l'equazione risolvente ed imponendo che questa abbia le radici coincidenti, dunque Δ=0 (condizione di tangenza). Risolvendo il sistema formato dalle equazioni rappresentative delle due condizioni suddette si determineranno i valori richiesti dei due parametri.

Coordinate di T

$T(2;...)\in t \rightarrow 2-2y-4=0 \rightarrow y=-1$; dunque T(2;-1).

$$T(2;-1)\in\lambda \rightarrow -1=4(k-1)+2h \rightarrow h=\frac{3-4k}{2}$$

L'equazione della parabola λ deve essere del tipo $\lambda: y=(k-1)x^2+\frac{3-4k}{2}x$.

Sistema con le equazioni della parabola e della retta tangente e determinazione dell'equazione risolvente

$$\begin{cases} t: x-2y-4=0 \\ \lambda: y=(k-1)x^2+\frac{3-4k}{2}x \end{cases} \quad \text{equazione risolvente} \quad (k-1)x^2+(1-2k)x+2=0$$

La condizione di tangenza è $\Delta = (1-2k) - 8(k-1) = 0$, da cui $(2k-3)^2 = 0$, quindi deve essere k=3/2. La parabola cercata è $\lambda: y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x$.

2) Troviamo l'equazione della retta t' che deve passare dal punto A (-3/2;…) appartenente alla parabola ed avente coefficiente angolare uguale a quello della retta t.

Ordinata di A

$$y_A = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{8} \to A\left(-\frac{3}{2};\frac{27}{8}\right)$$

Equazione della retta $t': y = \frac{1}{2}x + \frac{33}{8}$

Mettiamo a **sistema** l'equazione di t' con quella della parabola **per trovare il secondo punto B** di intersezione.

$\begin{cases} t': y = \frac{1}{2}x + \frac{33}{8} \\ \lambda: y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x \end{cases} \to 4x^2 - 16x - 33 = 0$, le radici dell'equazione sono $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{11}{2}$;

il punto B ha coordinate $B\left(\frac{11}{2};\frac{55}{8}\right)$.

Calcolo dell'area del segmento parabolico

Il segmento AB base del segmento parabolico ha misura

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{7^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2} = \frac{7}{2}\sqrt{5}$$

L'altezza del segmento parabolico è la distanza tra le due rette t, t' e possiamo determinarla trovando la distanza di A dalla retta t.

$$d(A;t) = \frac{\left|-\frac{3}{2} - 2\cdot\frac{27}{8} - 4\right|}{\sqrt{5}} = \frac{49}{4\sqrt{5}} = h$$

Area del segmento parabolico

$$Area_{seg\_p} = \frac{2}{3}\cdot\overline{AB}\cdot h = \frac{2}{3}\cdot\frac{7}{2}\sqrt{5}\cdot\frac{49}{4\sqrt{5}} = \frac{343}{12}$$

3) Per una parabola la cui equazione sia $y = ax^2 + bx + c$ il vertice V ha coordinate $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$, essendo $\Delta = b^2 - 4ac$. Nel nostro caso si ha

$$x_V = -\left(-\frac{3}{2}\right):\left(2\cdot\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2};\ y_V = -\frac{8}{8} \to V\left(\frac{3}{2}; -\frac{9}{8}\right)$$

Area del triangolo AVB

Determiniamo l'area del triangolo con il metodo del determinante. Nell'impostare il determinante avremo cura di formare le righe prendendo i punti nel verso antiorario.

$$Area(AVB) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_V & y_V & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{27}{8} & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{9}{8} & 1 \\ \frac{11}{2} & \frac{55}{8} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{27}{16} + \frac{297}{16} + \frac{165}{16}\right) - \left(-\frac{99}{16} - \frac{165}{16} + \frac{81}{16}\right)\right) = \frac{672}{2\cdot 16} = 21$$

Rapporto tra l'area del triangolo AVB e quella del segmento parabolico

$$r = \frac{Area(AVB)}{Area_{seg\_p}} = \frac{21}{\frac{343}{12}} =$$

$$\frac{36}{49} \approx 73,47\%$$

4) La figura riepilogativa è a margine.