

Geometria analitica dell'iperbole

Retta tangente in un punto dell'iperbole e proprietà areolare

Problema

Q1) Si consideri nel riferimento cartesiano xOy degli assi dell'iperbole di equazione $\lambda: x^2 - 4y^2 = 20$ il punto A della curva avente ordinata -2 appartenente al quarto quadrante e si determini l'equazione della retta t tangente alla curva nello stesso punto.

Q2) Si determinino le coordinate dei punti P, Q di intersezione della tangente t con gli asintoti dell'iperbole e si calcoli la misura del segmento PQ.

Q3) Si calcoli l'area del triangolo OPQ verificando che questo valore coincide con il prodotto delle misure dei semiassi dell'iperbole (proprietà areolare dell'iperbole).

Q4) Si determinino le coordinate dei fuochi dell'iperbole e la sua eccentricità. Si realizzi una rappresentazione grafica nel piano cartesiano contenente tutti gli elementi geometrici elaborati.

Elaborazioni

Q1) Il punto A della curva ha coordinate $(x; -2)$, con $x > 0$; si determina l'ascissa del punto imponendo che la coppia ordinata soddisfi l'equazione dell'iperbole.

$$A \in \lambda \Rightarrow x^2 - 4 \cdot (-2)^2 = 20 \rightarrow x^2 = 36 \rightarrow x = 6. \quad \text{Il punto è } A(6; -2).$$

Possiamo scrivere l'equazione della tangente alla curva in A applicando le formule di sdoppiamento ricordando che l'equazione della tangente all'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ nel suo generico punto

$P(x_0; y_0)$ è $t_P: \frac{x_0 \cdot x}{a^2} - \frac{y_0 \cdot y}{b^2} = 1$. Avendosi $\lambda: \frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$, l'equazione della tangente richiesta è:

$$t_A: \frac{6 \cdot x}{20} - \frac{(-2) \cdot y}{5} = 1 \rightarrow t_A: 3x + 4y = 10.$$

Q2) In relazione all'equazione dell'iperbole in forma canonica $\lambda: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, gli asintoti hanno equazioni

$$y = \pm \frac{b}{a} x, \text{ perciò nel caso in esame le equazioni sono } s_1: y = \frac{1}{2} x, \quad s_2: y = -\frac{1}{2} x.$$

Punti di intersezioni della tangente t_A con gli asintoti.

$$\begin{cases} s_1: x = 2y \\ t_A: 3x + 4y = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow P(2; 1); \quad \begin{cases} s_2: x = -2y \\ t_A: 3x + 4y = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2y \\ -6y + 4y = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = -5 \end{cases} \rightarrow Q(10; -5)$$

Misura del segmento PQ

$$\overline{PQ} = \sqrt{(10-2)^2 + (-5-1)^2} = \sqrt{64+36} = 10$$

Q3) Calcoliamo l'area del triangolo OPQ con il metodo del determinante del terzo ordine.

$$Area(OPQ) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 10 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 10 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (10 + 10) = 10$$

Ricordiamo che facendo riferimento all'equazione canonica dell'iperbole $\lambda: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, le misure dei semiassi sono a e b . Nel caso specifico $a = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, $b = \sqrt{5}$. Osserviamo che risulta $a \cdot b = 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 10$.

Il valore coincide con quello dell'area del triangolo OPQ determinato sopra.

Proprietà areolare dell'iperbole

Ricordiamo che l'iperbole gode della seguente

Proprietà- Il triangolo avente per vertici il centro dell'iperbole e i punti P, Q di intersezione della retta tangente alla curva in un suo qualsiasi punto A con gli asintoti della curva ha area costante e questo valore coincide con il prodotto dei semiassi dell'iperbole.

Q4) I fuochi dell'iperbole in oggetto si trovano sull'asse delle ascisse e sono i punti $F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$, con

$c^2 = a^2 + b^2 = 20 + 5 = 25$, da cui $c=5$, quindi $F_1(5;0)$, $F_2(-5;0)$.

Eccentricità

L'eccentricità dell'iperbole è il rapporto tra la semidistanza focale ed il semiasse trasverso.

Dunque:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

La figura contenente tutti gli elementi geometrici elaborati è riportata in Figura 1.

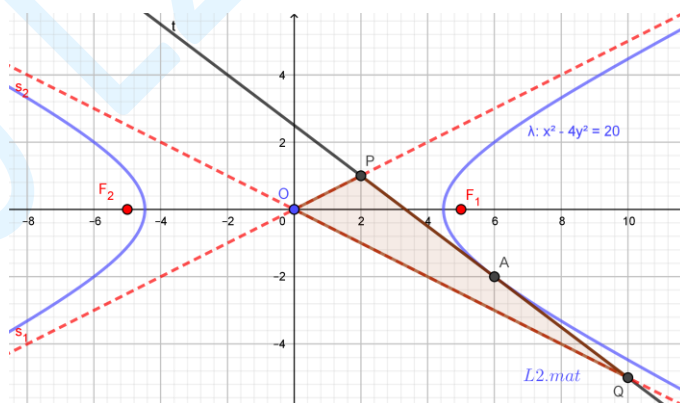


Figura 1