Esercitazione sull'Ellisse

Problema

Q_1-Determinare l'equazione dell'ellisse λ riferita ai propri assi con i fuochi sull'asse delle ascisse sapendo che passa per il punto P(-1;3/2) ed ha eccentricità 1/2.

Q_2-Determinare le coordinate dei fuochi F_1, F_2 e calcolare il perimetro del triangolo F_1F_2P.

Q_3- Scrivere l'equazione della retta t tangente all'ellisse in P. Determinare le coordinate del punto H proiezione del fuoco avente ascissa positiva sulla retta t e calcolare l'area del triangolo F_1HP.

Risoluzione

Q_1- L'equazione canonica dell'ellisse nel riferimento dei suoi assi è: $\lambda: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

La condizione di passaggio dal punto P(-1;3/2) è : $\frac{1}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1$.

L'eccentricità è data dal rapporto tra la semidistanza focale c ed il semiasse maggiore (che è *a*, perché i fuochi sono sull'asse delle ascisse); quindi c/*a*=1/2, da cui si ricava $c^2=\frac{a^2}{4}$ e poiché sussiste l'uguaglianza $c^2=a^2-b^2$ si ricava l'uguaglianza $b^2=a^2-\frac{a^2}{4}=\frac{3a^2}{4}$.

Risolvendo il sistema formato dalle due equazioni $\frac{1}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1,\ b^2=\frac{3a^2}{4}$ si ricavano i valori $a^2=4, b^2=3$.

L'equazione canonica dell'ellisse è $\lambda: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

Q_2- Per quanto concerne i due fuochi osserviamo che $c^2=1$, quindi c=1, perciò i fuochi sono $F_1(1;0)$, $F_2(-1;0)$.

Calcolo del perimetro del triangolo F_1F_2P. Il triangolo è rettangolo in F_2. Si ha:

$\overline{F_1F_2}=2;\ \overline{F_2P}=\frac{3}{2};\ \overline{F_1P}=\sqrt{2^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{5}{2} \rightarrow$ Perimetro(F_1F_2P)=6.

Q_3- Scriviamo l'equazione della tangente all'ellisse nel punto P utilizzando le "formule di sdoppiamento" per le quali si devono sostituire nell'equazione dell'ellisse x^2 con $x \cdot x_P$ e y^2 con $y \cdot y_P$. L'equazione che si ottiene è $t_P: x-2y+4=0$.

La proiezione ortogonale H del fuoco F_1 sulla retta t_P tangente in P si ottiene determinando l'intersezione della retta tangente in oggetto con la retta passante per il fuoco F_1 e perpendicolare alla tangente.

Poiché il coefficiente angolare della retta tangente è m=1/2, quello della retta $[F_1;H]$ ad essa perpendicolare è m'=-2. Possiamo scrivere l'equazione della retta $[F_1;H]$:

$[F_1;H]: y-y_{F_1}=-2\left(x-x_{F_1}\right) \rightarrow [F_1;H]: y=-2x+2$.

Troviamo le coordinate del punto H.

$$H:\begin{cases}[F_1;H]: y=-2x+2\\ t_P: x-2y+4=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}y=-2x+2\\ x-2(-2x+2)+4=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=2\end{cases}$$

Quindi H(0;2)

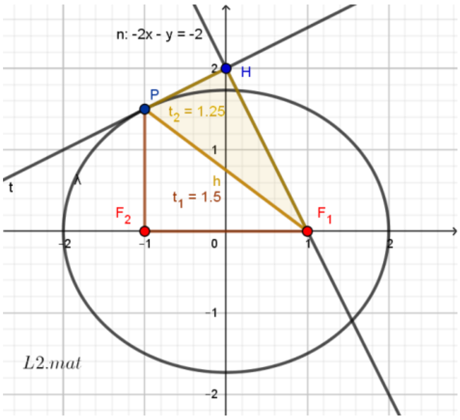

Figura 1

Area del triangolo

Il triangolo è rettangolo in H, perciò la sua area può essere determinata con il semiprodotto delle misure dei due cateti, F_1H, HP. Calcoliamo le misure dei cateti.

$\overline{F_1H}=\sqrt{1+2^2}=\sqrt{5}$; $\overline{HP}=\sqrt{1+\left(2-\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$; Area($F_1HP$)=

$$\frac{1}{2}\cdot\overline{F_1H}\cdot\overline{HP}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{5}{4}$$

In **Figura 1** sono riportati tutti gli elementi grafici relativi al problema risolto.