Circonferenze e rette

Fascio di circonferenze,asse radicale, punti base, aree di triangoli

Problema

Considerate le circonferenze $\lambda_1 : x^2 + y^2 - 16x + 39 = 0, \lambda_2 : x^2 + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ risolvere i seguenti quesiti.

Q1- Determinare l'equazione del fascio individuato dalle due curve e classificarlo.

Q2- Determinare l'equazione dell'asse radicale a.

Q3- Determinare l'equazione della circonferenza λ_3 del fascio passante per l'origine degli assi.

Q4- Determinare l'equazione della retta s dei centri.

Q5- Determinare sull'asse radicale i punti P che formano con i centri delle circonferenze λ_1, λ_2 triangoli aventi area 30.

Soluzione

Q1- L'equazione del fascio di circonferenze, utilizzando un solo parametro è:

$$F : \left(x^2 + y^2 - 16x + 39\right) + k\left(x^2 + y^2 - 4x - 6y + 3\right) = 0 \rightarrow$$
$$F : (1+k)x^2 + (1+k)y^2 - 4(4+k)x - 6ky + 3k + 39 = 0 \qquad (1)$$

Classificazione del fascio

Occorre stabilire quale sia la posizione relativa tra due qualsiasi circonferenze del fascio. Possiamo utilizzare le due circonferenze di partenza (curve generatrici del fascio) e risolvere il sistema formato dalle loro equazioni.

$$\begin{cases} \lambda_1 : x^2 + y^2 - 16x + 39 = 0 \\ \lambda_2 : x^2 + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0 \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro le due equazioni si ottiene l'equazione di una retta (ed è quella dell'asse radicale del fascio). Si risolve il sistema formato tra detta equazione e l'equazione di una delle due circonferenze.

$$\begin{cases} 2x - y - 6 = 0 \\ \lambda_1 : x^2 + y^2 - 16x + 39 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2x - 6 \\ x^2 - 8x + 15 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{A(5;4), B(3;0)}$$

Conclusione- Il fascio è composto da circonferenze secanti; i punti base sono A(5;4), B(3;0).

Q2- L' asse radicale è per definizione la circonferenza degenere del fascio e la sua equazione si ottiene sottraendo membro a membro le equazioni di due qualsiasi circonferenze del fascio, quando siano ridotte alla forma normale. Nel caso specifico l'equazione dell'asse radicale è stata determinata nella risoluzione del precedente quesito, risolvendo il sistema ed è $a : 2x - y - 6 = 0$.

Q3- Facendo riferimento all'equazione (1) del fascio di circonferenze, per determinare il valore del parametro k corrispondente alla circonferenza del fascio passante per l'origine degli assi basta

imporre che sia nullo il termine noto; infatti ciò corrisponde alla condizione algebrica che le coordinate dell'origine O(0;0) verifichino l'equazione del fascio di circonferenze:

$3k+39=0 \rightarrow k=-13$.

L'equazione della circonferenza λ_3 cercata è:

$\lambda_3 : 2x^2+2y^2-6x-13y=0$

Q4- L'equazione della retta dei centri si determina scrivendo l'equazione della retta passante per i centri di due qualsiasi circonferenze del fascio. I centri delle circonferenze basi λ_1, λ_2 sono rispettivamente $C_1(8;0)$, $C_2(2;3)$. L'equazione della retta cercata è $s: x+2y-8=0$.

Q5- Il generico punto P dell'asse radicale ha coordinate $P(x;2x-6)$. Per trovare l'area del triangolo PC_1C_2 si possono seguire diversi percorsi. Decidiamo di assumere il lato C_1C_2 come base e troviamo la misura dell'altezza relativa determinando le coordinate del punto H di intersezione tra l'asse radicale e la retta s dei centri.

$\overline{C_1C_2}=\sqrt{36+9}=3\sqrt{5}$; $\quad \begin{cases} a: y=2x-6 \\ s: x+2y-8=0 \end{cases} \rightarrow H(4;2)$.

Misura dell'altezza : $\overline{PH}=\sqrt{(4-x)^2+(2-2x+6)^2}=\sqrt{(4-x)^2+4(4-x)^2}=|4-x|\cdot\sqrt{5}$

Area del triangolo PC_1C_2

$$Area(PC_1C_2)=\frac{1}{2}\overline{C_1C_2}\cdot\overline{PH}=\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{5}\cdot|4-x|\cdot\sqrt{5}=\frac{15}{2}|4-x|$$

Imponendo la condizione che l'area del triangolo sia uguale a 30 si ottiene un'equazione che risolta fornisce i valori dell'ascissa x.

$\frac{15}{2}|4-x|=30 \rightarrow |4-x|=4 \rightarrow$

$x_1=0, x_2=8$.

Esistono dunque due posizioni utili per il punto P sull'asse radicale. I due punti sono $P_1(0;-6)$, $P_2(8;10)$.

Nella figura riportata sono rappresentati tutti gli elementi geometrici determinati nella risoluzione del problema.

