Sulla circonferenza e sulla retta

Circonferenze mutuamente tangenti

Problema

Nel piano cartesiano xOy si considerino la circonferenza γ di raggio unitario con centro nell'origine O degli assi e la retta s:3x-4y=0.

1) Determinare le equazioni delle circonferenze tangenti all'asse delle ascisse, alla retta s e alla circonferenza γ giacenti nel primo quadrante.
2) Riconosciuto che esistono due circonferenze aventi le proprietà indicate, determinare l'area della regione finita di piano delimitata dalle suddette circonferenze, dall'asse delle ascisse e dalla retta s.

RISOLUZIONE

Quesito_1

Osserviamo che le circonferenze cercate dovendo essere tangenti al semiasse positivo delle ascisse e alla retta s avranno i centri sulla bisettrice dell'angolo formato da detto semiasse e dalla semiretta di s con origine in O che giace nel primo quadrante. Scriviamo dunque l'equazione cartesiana di detta bisettrice.

Ricordiamo che le equazione delle due bisettrici degli angoli formati dalla retta s e dall'asse delle ascisse hanno equazione complessiva

$|y| = \frac{|3x-4y|}{\sqrt{3^2+4^2}}$, quindi $|y| = \frac{|3x-4y|}{5}$,

dalla quale si deduce che la bisettrice su cui giacciono i centri delle due circonferenze è

$b_1 : y = \frac{1}{3}x$ (è quella delle due che ha coefficiente angolare positivo).

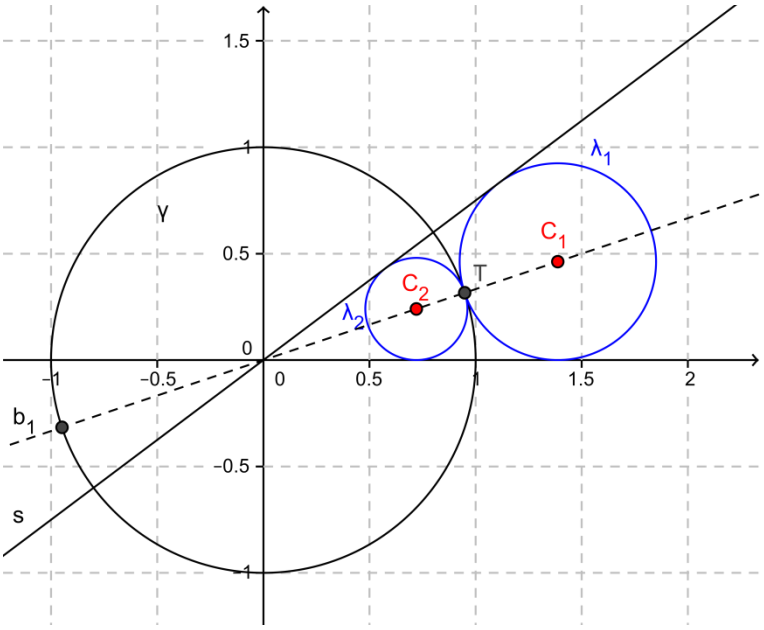

Figura 1

Sia dunque $C(\alpha;\beta)$ il centro di una delle circonferenze cercate. Dovendo appartenere alla bisettrice b_1 risulterà $\alpha=3\beta$, quindi $C(3\beta;\beta)$, con $\beta>0$. Troviamo la distanza di C dall'origine degli assi:

$\overline{OC}=\sqrt{(3\beta)^2+\beta^2}=\beta\sqrt{10}$.

Osserviamo ora che le circonferenze cercate saranno tangenti alla circonferenza γ nel punto T del primo quadrante in cui questa è intersecata dalla bisettrice b_1. Inoltre, la misura del raggio di ciascuna di dette circonferenze è uguale al valore dell'ordinata del centro ma anche alla differenza in valore assoluto tra OC e il raggio della circonferenza γ, pertanto possiamo scrivere

$\left|\overline{OC}-r_\gamma\right|=y_C$, da cui $\left|\beta\sqrt{10}-1\right|=\beta$

L'equazione ottenuta è equivalente alla seguente $\left(\beta\sqrt{10}-1=\beta\right)\vee\left(1-\beta\sqrt{10}=\beta\right)$, dalla quale si deducono i due valori di β: $\beta_1=\frac{1}{\sqrt{10}-1}$; $\beta_2=\frac{1}{\sqrt{10}+1}$, dunque esistono due circonferenze aventi le proprietà richieste. I centri delle due circonferenze sono: $C_1\left(\frac{3}{\sqrt{10}-1};\frac{1}{\sqrt{10}-1}\right)$, $C_2\left(\frac{3}{\sqrt{10}+1};\frac{1}{\sqrt{10}+1}\right)$; le equazioni delle corrispondenti circonferenze λ_1, λ_2, sono

$$\lambda_1:\left(x-\frac{3}{\sqrt{10}-1}\right)^2+\left(y-\frac{1}{\sqrt{10}-1}\right)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{10}-1}\right)^2;\ \lambda_2:\left(x-\frac{3}{\sqrt{10}+1}\right)^2+\left(y-\frac{1}{\sqrt{10}+1}\right)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{10}+1}\right)^2$$

Quesito_2

Facciamo riferimento alla Figura 2.

Notiamo che la regione piana ha area pari alla differenza tra la somma delle aree dei trapezi rettangoli AC_1C_2D, BCC_2C_1 e la somma delle aree dei due settori circolari AC_1BT, $DTCC_2$. Per la simmetria delle figure possiamo anche esprimere il precedente valore come il doppio della differenza tra l'area del trapezio rettangolo AC_1C_2D e la somma delle aree dei settori circolari AC_1T, DTC_2:

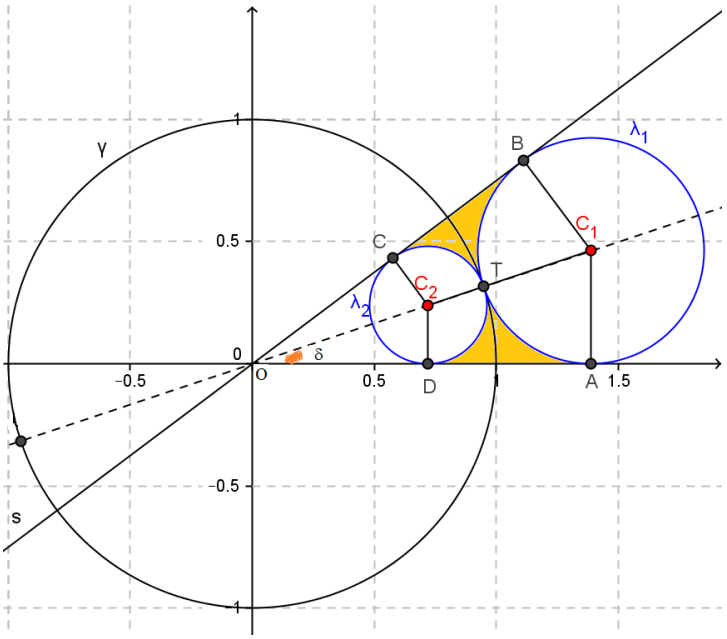

Figura 2

$S=2\left(Area(AC_1C_2D)-\left(Sett_{AC_1T}+Sett_{DTC_2}\right)\right)$. Calcoliamo dunque le aree delle figure componenti.

Indicando con δ l'ampiezza dell'angolo acuto DOC_2 risulta:

$tg\delta = \frac{1}{3}$, quindi $\delta = arctg\left(\frac{1}{3}\right)$; il settore DC_2T ha ampiezza $\frac{\pi}{2} + \delta$ ed il settore AC_1T ampiezza $\frac{\pi}{2} - \delta$. Indichiamo con r_1, r_2 rispettivamente i raggi delle due circonferenze λ_1, λ_2.

Risulta:

$$Area\left(AC_1C_2D\right) = \frac{1}{2}\left(r_1 + r_2\right)\cdot\overline{DA} = \frac{1}{2}\left(r_1 + r_2\right)\cdot\left(x_A - x_D\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{10}-1} + \frac{1}{\sqrt{10}+1}\right)\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{10}-1} - \frac{3}{\sqrt{10}+1}\right) = \frac{3}{2}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{10}-1}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{10}+1}\right)^2\right) = \frac{2\sqrt{10}}{27};$$

$$Sett_{AC_1T} = \frac{r_1^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)\left(\frac{1}{\sqrt{10}-1}\right)^2;$$

$$Sett_{DTC_2} = \frac{r_2^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right)\left(\frac{1}{\sqrt{10}+1}\right)^2$$

Area della regione piana richiesta

$$S = 2\left(Area\left(AC_1C_2D\right) - \left(Sett_{AC_1T} + Sett_{DTC_2}\right)\right) =$$

$$2\left(\frac{2\sqrt{10}}{27} - \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)\left(\frac{1}{\sqrt{10}-1}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right)\left(\frac{1}{\sqrt{10}+1}\right)^2\right)\right) = \ldots =$$

$$\frac{1}{81}\left(4\sqrt{10}\left(3 + \delta\right) - 11\pi\right) = \frac{1}{81}\left(4\sqrt{10}\left(3 + arctg\left(\frac{1}{3}\right)\right) - 11\pi\right) \approx 0{,}092$$