Geometria analitica della circonferenza

Perimetri ed aree di triangoli

Problema

Nel piano riferito ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali xOy si considerino il punto C(2;-1) e la retta s:x+y-3=0. Risolvere i quesiti che seguono.

1) Determinare l'equazione della circonferenza γ avente centro in C e passante per il punto P di s di ascissa 5. Sia Q il secondo punto comune tra s e γ.
2) Scrivere le equazioni delle rette tangenti a γ nei punti P e Q e determinare le coordinate del loro punto di intersezione L.
3) Riconoscere analiticamente che la retta congiungente C ed L è perpendicolare alla retta s. Determinare perimetro ed area del triangolo LPQ.
4) Determinare le coordinate del punto L′ comune a γ e alla retta congiungente L e C che si trova esternamente al segmento LC. Calcolare area e perimetro del triangolo PQL′.
5) Realizzare la figura contenente tutti gli elementi geometrici elaborati.

Risoluzione

1) Il punto P di s è P(5; -2). La misura del raggio della circonferenza γ è

$$r=\overline{CP}=\sqrt{(5-2)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{10}$$

L'equazione di γ è

$$\gamma:(x-2)^2+(y+1)^2=10\text{, da cui }\gamma:x^2+y^2-4x+2y-5=0.$$

Ricerca delle coordinate del punto Q

Si deve risolvere il sistema formato dalle equazioni della retta s e della circonferenza γ.

$$\begin{cases} s:x+y-3=0 \\ \gamma:x^2+y^2-4x+2y-5=0 \end{cases}\text{ da cui } P(5;-2),\ Q(1;2).$$

2) Riportiamo direttamente le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza nei punti P e Q, lasciando al lettore il compito di eseguire le elaborazioni algebriche necessarie.

$$t_P:3x-y-17=0,\qquad t_Q:x-3y+5=0.$$

Risolvendo il sistema formato dalle precedenti equazioni si trovano le coordinate del loro punto comune che risulta $L(7;4)$.

3) Ricordiamo che due rette r_1, r_2, che nel piano cartesiano ammettano rispettivamente coefficienti angolari m_1, m_2, sono tra loro perpendicolari se vale la relazione $m_1 \cdot m_2=-1$. Nel caso in esame risulta:

coefficiente angolare della retta s: m(s)=-1;

coefficiente angolare della retta CL: $m(CL)=\dfrac{y_L-y_C}{x_L-x_C}=\dfrac{4-(-1)}{7-2}=1$

risulta $m(s)\cdot m(CL)=-1$, dunque le rette sono tra loro perpendicolari.

Perimetro del triangolo LPQ

Osserviamo che il triangolo LPQ è isoscele su PQ (teorema delle tangenti condotte da un punto esterno ad una circonferenza).

$$\overline{LP}=\sqrt{(x_P-x_L)^2+(y_P-y_L)^2}=\sqrt{(5-7)^2+(-2-4)^2}=2\sqrt{10}\ ;$$

$$\overline{QP}=\sqrt{(x_P-x_Q)^2+(y_P-y_Q)^2}=\sqrt{(5-1)^2+(-2-2)^2}=4\sqrt{2}$$

$$Perim.(LPQ)=2\overline{LP}+\overline{QP}=4\sqrt{10}+4\sqrt{2}=4\left(\sqrt{10}+\sqrt{2}\right).$$

Area del triangolo LPQ

Assunto il lato QP come base del triangolo, troviamo la misura h dell'altezza relativa con la formula della distanza di un punto da una retta.

$$h=d(L;QP)=\frac{|7+4-3|}{\sqrt{1+1}}=\frac{8}{\sqrt{2}}$$

$$Area(LPQ)=\frac{1}{2}\cdot\overline{QP}\cdot h=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot\frac{8}{\sqrt{2}}=16$$

4) Per trovare le coordinate del punto L′ scriviamo l'equazione della retta congiungente L con il centro C della circonferenza e risolviamo il sistema formato da detta equazione e da quella della circonferenza.

$$[C;L]:\frac{x-x_C}{x_L-x_C}=\frac{y-y_C}{y_L-y_C}\to\frac{x-2}{7-2}=\frac{y+1}{4+1}\to x-y-3=0$$

Sistema di equazioni:

$$\begin{cases}x-y-3=0\\ \gamma: x^2+y^2-4x+2y-5=0\end{cases}\to\begin{cases}x=y+3\\ (y+3)^2+y^2-4(y+3)+2y-5=0\end{cases}$$

Si risolve l'equazione di secondo grado nell'incognita y che si ottiene:

$y^2+2y-4=0$, le cui radici sono $y_2^1=-1\pm\sqrt{5}$; dei due valori l'ordinata del punto L′ è quello minore: $y_{L'}=-1-\sqrt{5}$, per cui l'ascissa dello stesso punto è $x_{L'}=2-\sqrt{5}$. $L'\left(2-\sqrt{5};-1-\sqrt{5}\right)$

Area del triangolo PQL′

Per l’area utilizziamo la formula del determinante del terzo ordine che utilizza le coordinate dei tre vertici del triangolo. Nel comporre il determinante prendiamo i punti nel verso antiorario onde evitare il simbolo di modulo. Risulta

$$Area(PQL')=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_P & y_P & 1\\ x_Q & y_Q & 1\\ x_{L'} & y_{L'} & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 2-\sqrt{5} & -1-\sqrt{5} & 1\end{vmatrix}=\ldots=4\left(1+\sqrt{5}\right)$$

Perimetro del triangolo PQL′

Il triangolo è isoscele su PQ, quindi $Perim.(PQL')=2\overline{QL'}+\overline{QP}$.

$$\overline{QL'}=\sqrt{\left(1-2+\sqrt{5}\right)^2+\left(2+1+\sqrt{5}\right)^2}=\ldots=2\sqrt{5+\sqrt{5}}$$

$$Perim.(PQL')=4\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{2}\right)$$

5) Segue la figura