Circonferenza, triangolo inscritto e parallelogramma

Problema

Nel piano riferito ad un sistema di assi cartesiani xOy si considerino i punti A(-4;3), B(-6;-3), C(0;-5) e la retta s:x-2y-9=0. Risolvere i quesiti che seguono.

1) Classificare il triangolo ABC e trovarne perimetro ed area.
2) Scrivere l'equazione della circonferenza γ circoscritta al triangolo ABC.
3) Determinare le equazioni delle rette tangenti a γ che risultano perpendicolari alla retta s e le equazioni delle rette tangenti parallele all'asse delle ascisse.
4) Calcolare perimetro ed area del parallelogramma MNPQ delimitato dalle quattro rette tangenti di cui al precedente quesito.
5) Realizzare una figura riepilogativa contenente tutti gli elementi geometrici elaborati.

Risoluzione

1) Determiniamo le misure dei lati del triangolo ABC.

$$\overline{AB} = \sqrt{(-6+4)^2 + (-3-3)^2} = 2\sqrt{10}\ ;\ \overline{BC} = \sqrt{(6)^2 + (-5+3)^2} = 2\sqrt{10}\ ;$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(4)^2 + (-5-3)^2} = 4\sqrt{5}$$

Il triangolo è isoscele su AC. Si osserva inoltre che risulta $\overline{AC}^2 = 80 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$, dunque il triangolo è anche rettangolo con il vertice dell'angolo retto in A. Il perimetro del triangolo vale

$$Perim(ABC) = 2\overline{AB} + \overline{AC} = 4\left(\sqrt{10} + \sqrt{5}\right)$$

Area del triangolo: $Area(ABC) = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}^2 = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{10}\right)^2 = 20$

2) La circonferenza circoscritta al triangolo ABC ha centro nel punto medio dell'ipotenusa AC e raggio $r = \overline{AC}/2 = 2\sqrt{5}$. Poiché il punto medio di AC è $D(-2;-1)$, possiamo scrivere velocemente l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo ABC.

$$\gamma : (x+2)^2 + (y+1)^2 = \left(2\sqrt{5}\right)^2$$, da cui $\gamma : x^2 + y^2 + 4x + 2y - 15 = 0$.

3) La retta s ha coefficiente angolare m(s)=1/2, quindi le due rette tangenti a γ e perpendicolari ad s appartengono al fascio improprio di rette $F : y = -2x + q$. Per trovare i valori del parametro q corrispondenti alle due tangenti determiniamo la distanza del centro D di γ dalla generica retta del fascio ed imponiamo che sia uguale alla misura del raggio di γ.

$$d = \frac{|2(-2) + (-1) - q|}{\sqrt{5}} = \frac{|5+q|}{\sqrt{5}}$$

Condizione: d=r$\rightarrow \frac{|5+q|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \rightarrow |5+q| = 10$, da cui $5+q=\pm 10$. Si hanno due valori:

$q_1 = 5$, cui corrisponde la retta tangente $t_1 : y = -2x+5$;

$q_2 = -15$, cui corrisponde la retta tangente $t_2 : y = -2x-15$

Equazioni delle rette tangenti parallele all'asse delle ascisse.

Le due tangenti sono:

$t_3 : y = y_D + r$, cioè $t_3 : y = -1+2\sqrt{5}$;

$t_4 : y = y_D - r$, cioè $t_4 : y = -1-2\sqrt{5}$.

4) Determiniamo le coordinate dei vertici del parallelogramma MNPQ definito dalle quattro tangenti.

$$M : \begin{cases} t_1 : y = -2x+5 \\ t_3 : y = -1+2\sqrt{5} \end{cases} \rightarrow M\left(3-\sqrt{5}; 2\sqrt{5}-1\right)$$

$$N : \begin{cases} t_2 : y = -2x-15 \\ t_3 : y = -1+2\sqrt{5} \end{cases} \rightarrow N\left(-7-\sqrt{5}; 2\sqrt{5}-1\right)$$

$$P : \begin{cases} t_2 : y = -2x-15 \\ t_4 : y = -1-2\sqrt{5} \end{cases} \rightarrow P\left(\sqrt{5}-7; -2\sqrt{5}-1\right); Q : \begin{cases} t_1 : y = -2x+5 \\ t_4 : y = -1-2\sqrt{5} \end{cases} \rightarrow Q\left(\sqrt{5}+3; -2\sqrt{5}-1\right)$$

Misure dei lati: $\overline{MN} = 10$; $\overline{NP} = \sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2 + \left(4\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{20+80} = 10$

Il parallelogramma è un rombo.

Osservazione (nota teorica)

Ogni parallelogramma circoscritto ad una circonferenza è un rombo perché un quadrilatero è circoscrivibile ad una circonferenza se e solo se la somma di due lati opposti è congruente alla somma degli altri due. Poiché in un parallelogramma i lati opposti sono tra loro congruenti, si deduce immediatamente che sono congruenti i quattro lati del parallelogramma circoscritto e quindi che è un rombo.

Il **perimetro del rombo** misura **40**.

Area del rombo

Possiamo ottenere il valore dell'area moltiplicando la misura di un lato del rombo per il diametro della circonferenza γ.

$$Area\left(MNPQ\right) = \overline{MN} \cdot 2r = 10 \cdot 4\sqrt{5} = 40\sqrt{5}$$

5) Segue la figura riepilogativa.

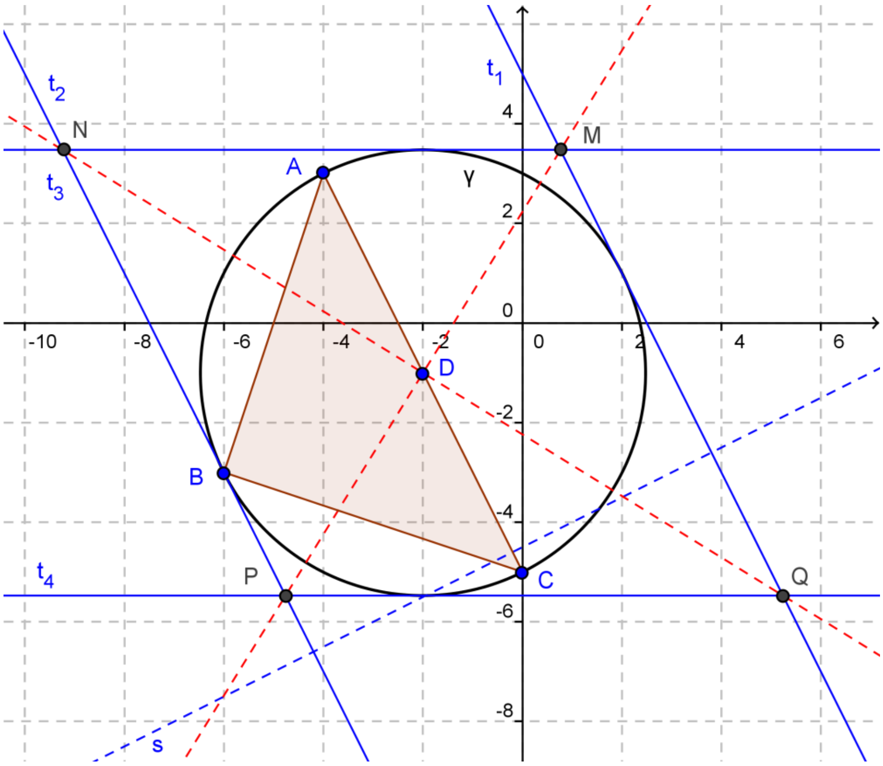

Figura 1-Si osservi che la tangente t_2 è parallela al diametro AC di γ e che tocca questa in B.