Sulla circonferenza

Tangenti ad una circonferenza, calcolo di aree

Problema

Nel piano cartesiano dotato di riferimento ortogonale xOy si consideri la circonferenza $\gamma : x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$ ed il punto P(2;3). Risolvere i quesiti che seguono.

1) Riconoscere che il punto P è esterno alla circonferenza.
2) Scrivere le equazioni delle rette tangenti t_1, t_2 condotte da P a γ e determinare le coordinate dei punti di contatto.
3) Indicata con t_2 la tangente avente coefficiente angolare positivo ed A il relativo punto di contatto, determinare l'equazione della circonferenza γ' tangente a γ in A e all'asse delle ascisse.
4) Siano B e D rispettivamente il centro di γ' e il punto di contatto di questa con l'asse x. Indicato con E il punto di ordinata minore in cui γ interseca l'asse delle ordinate ed O l'origine degli assi cartesiani, calcolare l'area del poligono ABDOE.
5) Realizzare una figura riepilogativa contenente gli elementi geometrici elaborati.

Risoluzione

1) Indicato con C il centro di γ, il punto P sarà esterno a γ se la sua distanza da C è maggiore del raggio della stessa; è sufficiente dunque determinare la misura della distanza CP e confrontarla con la misura del raggio[1].

   Com'è noto, in riferimento all'equazione cartesiana della circonferenza $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, nel caso in cui questa sia a punti reali, il centro C è il punto $C\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$ e la misura del raggio r è $r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}$. Ciò premesso risulta:

   $$C(0;2);\ r = \sqrt{\frac{16}{4} - 3} = 1.$$

   Determiniamo la distanza CP.

   $\overline{CP} = \sqrt{(x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$. Poiché $\sqrt{5} > r$, il punto P è esterno alla circonferenza.

Osservazione_1

Un modo diverso e molto veloce per riconoscere la posizione di un punto $P(x_0; y_0)$ rispetto alla circonferenza a punti reali di equazione $\gamma : x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ consiste nel calcolare il valore del primo membro dell'equazione nel punto indicato. Sussistono i seguenti casi:

[1] Vedere anche la successiva Osservazione_1

i) se $x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c > 0$, allora il punto è esterno alla circonferenza;

ii) se $x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c = 0$, allora il punto appartiene alla circonferenza;

iii) se $x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c < 0$, allora il punto è interno alla circonferenza.

Verifichiamo la posizione di P rispetto a γ con questo metodo.

$x_P^2 + y_P^2 - 4y_P + 3 = 4 + 9 - 4 \cdot 3 + 3 = 4 > 0$ Il punto P è esterno a γ.

2) Una volta riconosciuto che P è esterno alla circonferenza si sa che per esso esistono due rette tangenti alla curva le cui equazioni si possono ottenere con diversi procedimenti. Qui applichiamo il seguente procedimento.
   a. Scriveremo l'equazione del fascio proprio F di rette di centro P;
   b. determineremo con la formula della distanza di un punto da una retta la distanza del centro C di γ dalla generica retta del fascio;
   c. imporremo che la distanza trovata nel precedente punto sia uguale alla misura del raggio di γ ottenendo in tal modo un'equazione che risolta permetterà di ricavare i coefficienti angolari delle due rette tangenti.

Osservazione_2

Prima di scrivere l'equazione del fascio proprio di rette di centro P osserviamo che una delle due tangenti è la retta per P parallela all'asse delle ascisse la cui equazione è y=3. Per quanto concerne la seconda retta tangente, osserviamo che si tratta di una retta non parallela all'asse y per cui la sua equazione può essere posta nella forma $y - y_P = m(x - x_P)$.

Elaborazioni

a) Equazione del fascio proprio di rette centro P

$$F : y - 3 = m(x - 2) \rightarrow F : mx - y + 3 - 2m = 0$$

b) Distanza di C dalla generica retta del fascio F.

$$d(C;F) = \frac{|m \cdot 0 - 2 + 3 - 2m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{|3 - 2m|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

c) Equazione da risolvere

$$\frac{|3 - 2m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1 \rightarrow |3 - 2m| = \sqrt{m^2 + 1} \rightarrow |3 - 2m|^2 = \left(\sqrt{m^2 + 1}\right)^2 \rightarrow m(3m - 4) = 0$$

Si hanno le due radici: $m_1 = 0$, cui corrisponde la retta tangente t_1:y=3; $m_2 = \frac{4}{3}$, cui corrisponde la retta tangente $t_2 : 4x - 3y + 1 = 0$.

Ricerca dei punti di contatto

Il punto di contatto tra t_1 e la circonferenza è H(0;3).

Per la ricerca delle **coordinate del punto di contatto tra t_2 e la circonferenza** si deve risolvere il sistema formato dalle equazioni delle due curve.

$$\begin{cases} t_2 : 4x-3y+1=0 \\ \gamma : x^2+y^2-4y+3=0 \end{cases} \text{ da cui } \begin{cases} x=\dfrac{3y-1}{4} \\ \left(\dfrac{3y-1}{4}\right)^2+y^2-4y+3=0 \end{cases}$$

Dopo alcune elaborazioni si perviene all'equazione di secondo grado seguente

$25y^2-70y+49=0$, soddisfatta da $y_1=y_2=\dfrac{7}{5}$; si ricava l'ascissa $x=\dfrac{1}{4}\left(3\cdot\dfrac{7}{5}-1\right)=\dfrac{4}{5}$.

Il punto di contatto richiesto è $A\left(\dfrac{4}{5};\dfrac{7}{5}\right)$.

3) Osserviamo che la circonferenza γ' ha come centro il punto di intersezione tra la retta s congiungente C con A e la bisettrice dell'angolo formato dal semiasse positivo delle ascisse con la tangente t_2. Troviamo dunque le equazioni di dette rette e risolviamo il sistema formato con esse.

Retta [C;A]:3x+4y-8=0.

Retta bisettrice b:4x-8y+1=0

Intersezione delle due rette

$$\begin{cases} s : 3x+4y-8=0 \\ b : 4x-8y+1=0 \end{cases} \rightarrow x=\frac{3}{2}; y=\frac{7}{8}$$

Il centro di γ' è $B\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{7}{8}\right)$ ed il raggio coincide con l'ordinata di questo punto. L'equazione di γ' è

perciò $\gamma' : \left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{7}{8}\right)^2=\dfrac{49}{64}$.

4) Per le coordinate del punto E poniamo x=0 nell'equazione della circonferenza γ e otteniamo l'equazione $y^2-4y+3=0$; le radici sono y_1=1, y_2=3. Si ha E(0;1).

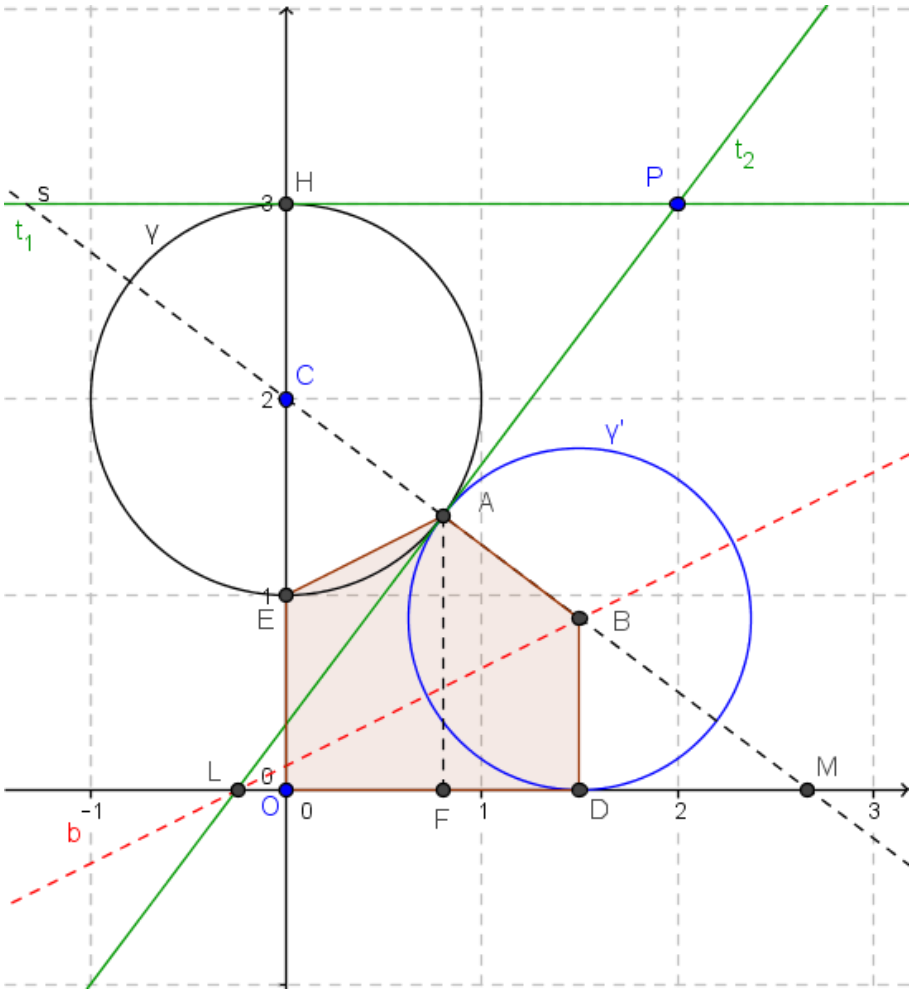
Area del poligono ABDOE

Il punto di contatto con l'asse x di γ' è $D\left(\dfrac{3}{2};0\right)$.

Notiamo che conducendo per A la parallela all'asse delle ordinate e detta F la sua intersezione con l'asse delle ascisse, il poligono ABDOE rimane decomposto nei due trapezi rettangoli ABDF, AFOE per cui l'area del poligono risulta essere:

$$Area\left(ABDOE\right)=Area\left(ABDF\right)+Area\left(AFOE\right);$$

$$Area\left(ABDF\right)=\frac{1}{2}\left(\overline{AF}+\overline{BD}\right)\cdot\overline{FD}=\frac{1}{2}\left(\frac{7}{5}+\frac{7}{8}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{5}\right)=\frac{7^2\cdot 13}{32\cdot 25}$$

$$Area\left(AFOE\right)=\frac{1}{2}\left(\overline{AF}+\overline{OE}\right)\cdot\overline{OF}=\frac{1}{2}\left(\frac{7}{5}+1\right)\cdot\frac{4}{5}=\frac{24}{25}$$

$$Area\left(ABDOE\right)=\frac{7^2\cdot 13}{32\cdot 25}+\frac{24}{25}=\frac{7^2\cdot 13+32\cdot 24}{32\cdot 25}=\frac{281}{160}\approx 1,756$$