Discutere il sistema parametrico

(Metodo grafico)

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x-2y-\dfrac{5k}{k+1}=0 \\ x\geq 0; \end{cases}$$

Soluzione

Analisi del problema

L'equazione $x^2+y^2=5$ rappresenta la circonferenza avente centro O(0;0) e raggio $R=\sqrt{5}$. L'equazione parametrica $x-2y-\dfrac{5k}{k+1}=0$, per i valori reali k≠-1, rappresenta un fascio di rette parallele aventi coefficiente angolare m=1/2 .

Risolvere il sistema in esame, con le limitazioni x≥0, significa determinare per quali valori del parametro k le rette del fascio intersecano la circonferenza lungo l'arco giacente nei quadranti primo e quarto. L'arco utile è dunque la semicirconferenza il cui diametro ha estremi $A\left(0;\sqrt{5}\right)$, $B\left(0;-\sqrt{5}\right)$.

Strategia risolutiva

Al variare del parametro k le rette del fascio scorrono parallelamente a se stesse; individueremo i valori del parametro corrispondenti alle due rette del fascio passanti dagli estremi dell'arco e di quella che è tangente alla circonferenza in un punto dell'arco utile. Successivamente, osservando la dinamica della retta del fascio, dedurremo i valori del parametro per i quali il sistema ammette soluzioni.

Avvertiamo il lettore che nella ricerca della retta tangente all'arco utile dovremo far ricorso al concetto di retta limite di un fascio di rette quando questo è rappresentato da un'equazione contenente un solo parametro.

Elaborazioni

Passaggio $A\left(0;\sqrt{5}\right)$ - Imponendo che l'equazione del fascio sia soddisfatta dalle coordinate di A si ottiene l'equazione

$k_A: 0-2\sqrt{5}-\dfrac{5k}{k+1}=0$, da cui si ricava $k_A=2\left(2-\sqrt{5}\right)$.

Retta per $B\left(0;-\sqrt{5}\right)$ - Imponendo che l'equazione del fascio sia soddisfatta dalle coordinate di B si ottiene l'equazione

$k_B: 0+2\sqrt{5}-\dfrac{5k}{k+1}=0$, da cui si ricava $k_B=2\left(2+\sqrt{5}\right)$

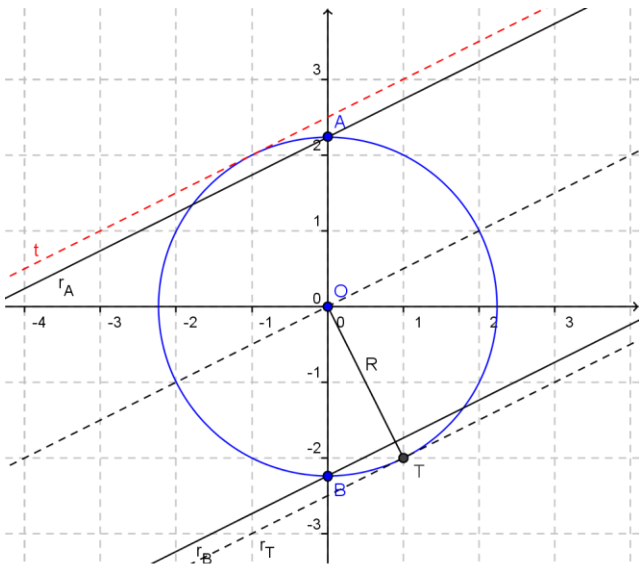
Retta del fascio tangente

Esistono due rette del fascio che sono tangenti alla circonferenza; per ottenere i corrispondenti valori del parametro imponiamo che il centro O(0;0) abbia dalla generica retta *t* del fascio distanza uguale al raggio $R=\sqrt{5}$. Si ottiene la seguente equazione nell'incognita k :

$d(O;t)=\dfrac{\left|-\dfrac{5k}{k+1}\right|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$, da cui si deduce $\dfrac{5k}{k+1}=\pm 5$. Affrontiamo dunque le due equazioni.

- $\dfrac{5k}{k+1}=5$, con k≠-1 diventa $5k=5k+5$, che non ha soluzioni;
- $\dfrac{5k}{k+1}=-5$, sempre con k≠-1 diventa $5k=-5k-5$, soddisfatta da $k=-\dfrac{1}{2}$.

Osserviamo che non abbiamo trovato due valori del parametro k corrispondenti ad altrettante rette tangenti alla circonferenza; all'unico valore trovato corrisponde la retta $t: x-2y+5=0$, rappresentata in figura in colore rosso e stile tratteggio, che è tangente alla circonferenza in un punto del secondo quadrante.



Che fine ha fatto la seconda retta tangente?

Ricordiamo che allorché l'equazione di un fascio di rette è scritta con la presenza di un solo parametro, la stessa rappresenta tutte le rette del fascio tranne una, la cosiddetta retta limite (o retta esclusa). Occorre stabilire se la retta limite coincide con la retta tangente alla circonferenza nel quarto quadrante. Scriviamo l'equazione del fascio in forma diversa, con k≠-1.

$(k+1)x-2(k+1)y-5k=0$, da cui

$k(x-2y-5)+x-2y=0$

La retta limite del fascio è quella retta la cui equazione non può essere ottenuta per alcun valore del parametro k e questa retta nel caso specifico ha equazione $r_{\lim}: x-2y-5=0$. Senza risolvere il sistema tra quest'equazione e quella della circonferenza si verifica immediatamente che la retta è tangente alla circonferenza perché la sua distanza dal centro O è uguale alla misura del raggio. Infatti risulta

$$d(O;r_{\lim})=\frac{|0-2\cdot 0-5|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}.$$

Conclusione

La seconda retta del fascio tangente alla circonferenza è proprio la retta limite $r_{\lim}: x-2y-5=0$. Il punto T di contatto tra questa retta e la circonferenza si determina risolvendo il sistema composto dall'equazione della retta limite e l'equazione della circonferenza.

$\begin{cases} r_{\lim}: x-2y-5=0 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ La soluzione è $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$, dunque $T(1;-2)$.

Verso la discussione delle soluzioni del sistema

La particolarità rilevata che la tangente all'arco utile della circonferenza sia proprio la retta limite, ai fini della discussione impone che si studi per quali valori del parametro k la generica retta *r* del fascio ha distanza dal centro della circonferenza compresa tra zero e la misura del raggio: $R=\sqrt{5}$.

Poiché $d(r;O)=\dfrac{\left|-\dfrac{5k}{k+1}\right|}{\sqrt{5}}$, risolviamo la disequazione

$\dfrac{\left|-\dfrac{5k}{k+1}\right|}{\sqrt{5}} \le \sqrt{5}$, che si riduce alla forma $\left|\dfrac{k}{k+1}\right| \le 1$, equivalente alla doppia disuguaglianza

$-1 \le \dfrac{k}{k+1} \le 1$, quindi al sistema $\begin{cases} \dfrac{k}{k+1} \ge -1 \\ \dfrac{k}{k+1} \le 1 \end{cases}$, ridotto al seguente $\begin{cases} \dfrac{2k+1}{k+1} \ge 0 \\ \dfrac{1}{k+1} \ge 0 \end{cases}$.

La prima disequazione è soddisfatta per i valori di k tali che $(k<-1) \vee \left(k \ge -\dfrac{1}{2}\right)$; la seconda disequazione è soddisfatta per i valori di k tali che k>-1 e pertanto il sistema il sistema ammette come insieme delle soluzioni l'intervallo $\left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.

Siamo ora in grado di effettuare la

Discussione delle soluzioni del sistema

Per $k=2\left(2-\sqrt{5}\right)$ la retta del fascio passa da A, è secante la circonferenza ma il sistema ammette una sola soluzione; si tratta delle coordinate di A; il secondo punto di intersezione ha ascissa negativa e non appartiene all'arco utile contenuto nel primo e quarto quadrante.

Per $2\left(2-\sqrt{5}\right)<k<2\left(2+\sqrt{5}\right)$ la retta del fascio è secante la circonferenza ed interseca l'arco utile in un solo punto. Il sistema ammette una sola soluzione ordinaria.

Per $k=2\left(2+\sqrt{5}\right)$, si ha la retta del fascio passante per B. La retta è secante la circonferenza con il secondo punto (distinto da B) appartenente al quarto quadrante. Il sistema ammette due soluzioni, una estrema (quella corrispondente al punto B), l'altra ordinaria.

Per $k>2\left(2+\sqrt{5}\right)$ si hanno rette del fascio comprese tra la retta passante per B e la retta tangente alla circonferenza nel punto $T\left(1;-2\right)$; dette rette sono distinte dalla tangente in T (ricordiamo che questa è la retta limite del fascio). Le rette sono secanti la circonferenza e tagliano l'arco utile in due punti. Il sistema ammette due soluzioni distinte.