Discutere il sistema parametrico

(Metodo grafico)

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x=0 \\ x+2y+k=0 \\ x\geq 0; y\geq 0 \end{cases}$$

Soluzione

Analisi del problema

L'equazione $x^2+y^2-4x=0$ rappresenta la circonferenza avente centro C(2;0) e raggio 2. L'equazione parametrica $x+2y+k=0$ rappresenta un fascio di rette parallele aventi coefficiente angolare m=-1/2.

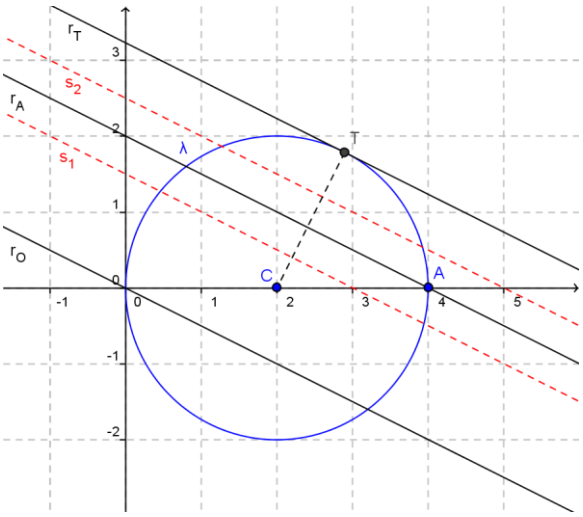
Risolvere il sistema in esame, con le limitazioni x≥0, y≥0, significa determinare per quali valori del parametro k le rette del fascio intersecano la circonferenza lungo l'arco giacente nel primo quadrante. L'arco è una semicirconferenza il cui diametro è il segmento di estremi l'origine O(0;0) ed il punto A(4;0).

Strategia risolutiva

Al variare del parametro k le rette del fascio scorrono parallelamente a se stesse; individueremo i valori del parametro corrispondenti alle due rette del fascio passanti dagli estremi dell'arco e di quella che è tangente alla circonferenza in un punto dell'arco utile. Successivamente, osservando la dinamica della retta del fascio, dedurremo i valori del parametro per i quali il sistema ammette soluzioni.

Elaborazioni

Passaggio dall'origine O(0;0) - Imponendo che l'equazione del fascio sia soddisfatta dalla coppia (0;0) si ricava k=0. Dunque k_O=0 e la retta corrispondente è r_O:x+2y=0.



Retta per A(4;0)- Imponendo che l'equazione del fascio sia soddisfatta dalla coppia (x=4;y=0) si ottiene l'equazione 4+k=0, da cui k=-4. La retta corrispondente è

$r_A: x+2y-4=0$.

Retta del fascio tangente

Esistono due rette del fascio che sono tangenti alla circonferenza; per ottenere i corrispondenti valori del parametro imponiamo che il centro C(2;0) abbia dalla generica retta *t* del fascio distanza uguale al raggio r=2, ottenendo in tal modo un'equazione nell'incognita k che andrà risolta.

$d(C;t)=\dfrac{|2+2\cdot 0+k|}{\sqrt{5}}=2$, da cui si deduce $2+k=\pm 2\sqrt{5}$, quindi $k_1=-2\sqrt{5}-2$, $k_2=-2\sqrt{5}+2$.

Si riconosce che il valore corrispondente alla retta tangente alla circonferenza nel primo quadrante è $k_1 = -2\sqrt{5} - 2$, mentre al valore $k_2 = -2\sqrt{5} + 2$ corrispondente la retta tangente alla circonferenza nel quarto quadrante (non rappresentata in figura). Detto T il punto di contatto tra la tangente e l'arco OA, l'equazione della retta tangente è $r_T : x + 2y - 2\sqrt{5} - 2 = 0$.

Discussione delle soluzioni

Osserviamo preliminarmente che all'aumentare dei valori del parametro k la corrispondente retta del fascio scorre nel verso delle ordinate negative.

Per $k < -2\sqrt{5} - 2$ si hanno rette del fascio esterne alla circonferenza che si trovano al di sopra della retta r_T, quindi il sistema non ammette soluzioni.

Per $k = -2\sqrt{5} - 2$ si ha la retta tangente all'arco utile nel punto T che è interno all'arco; il sistema ammette due soluzioni coincidenti.

Per $-2\sqrt{5} - 2 < k < -4$, si hanno rette del fascio che tagliano l'arco utile in due punti distinti tra loro e distinti dagli estremi dell'arco. Il sistema ammette due soluzioni (ordinarie). In figura compare la retta indicata con s_2 che appartiene a detto gruppo di rette.

Per $k = -4$ si ha la retta del fascio che passa per A, che taglia l'arco utile oltre che in A in un secondo punto interno all'arco. Il sistema ammette ancora due soluzioni distinte, delle quali quella i cui valori sono le coordinate di A rappresenta la soluzione estrema (limite) e l'altra è una soluzione ordinaria.

Per $-4 < k < 0$ si hanno rette del fascio che tagliano l'arco utile solo in un punto; il secondo punto di intersezione delle rette con la circonferenza si trova nel quarto quadrante. Dunque il sistema ammette una sola soluzione ordinaria. In figura è rappresentata la retta indicata con s_1 che appartiene a detto gruppo di rette.

Per $k = 0$ si ha la retta passante per l'origine degli assi che incontra la circonferenza in un secondo punto appartenente al quarto quadrante. Il sistema ammette una sola soluzione estrema (limite).

Per $k > 0$ il sistema non presenta soluzioni. In particolare, per $0 < k \le 2\sqrt{5} - 2$ le corrispondenti rette del fascio intersecano la semicirconferenza giacente nel quarto quadrante e per $k > 2\sqrt{5} - 2$ le rette del fascio sono esterne alla circonferenza e si trovano al di sotto di questa.