Geometria analitica della retta

(sui luoghi geometrici di un triangolo: circocentro)

Problema_3

Del triangolo ABC sono noti i vertici A(-2;0), B(1;3) e si sa che il circocentro H ha ascissa $x=\frac{1}{2}$.

Q1- Determinare la condizione algebrica che deve essere soddisfatta dalle coordinate (x;y) dal terzo vertice C del triangolo.

Q2- Determinare le coordinate del terzo vertice C′ del triangolo nell'ipotesi che esso appartenga all'asse delle ascisse e le coordinate del terzo vertice C″ del triangolo nell'ipotesi che appartenga all'asse y. Determinare i valori delle aree dei triangoli ABC′, AB C″.

Q3-Verificare che il trapezio ABC′C″ è isoscele.

Soluzione

Q1- Sia C(x;y) il terzo vertice del triangolo ABC.

Ricordiamo che il circocentro di un triangolo è il punto di intersezione degli assi e che è equidistante dai tre vertici.

Per determinare le coordinate del circocentro scriviamo innanzitutto l'equazione dell'asse s del lato AB; ciò fatto, conoscendo il valore dell'ascissa del circocentro H si troverà il valore dell'ordinata.

$$s:(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=(x-x_B)^2+(y-y_B)^2 \rightarrow x^2+(y-2)^2=(x-2)^2+y^2 \rightarrow s: y=x$$

Dunque l'asse del lato AB è la retta bisettrice del primo e terzo quadrante. Il circocentro è il punto $H\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Determineremo ora la distanza di uno dei punti A o B da H ed imporremo che il terzo vertice C(x;y) del triangolo abbia da H la stessa distanza di A (o di B); questa sarà la condizione algebrica che deve essere soddisfatta dalle coordinate del terzo vertice .

Distanza di A da H

$$\overline{AH}=\sqrt{(x_H-x_A)^2+(y_H-y_A)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-2\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

Imponiamo che risulti $\overline{CH}=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Si ha: $\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$, ed eliminando i radicali,

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2} \qquad (*) \qquad \text{(condizione algebrica richiesta)}^{(1)}$$

---

(1) Se lo studente conosce già l'equazione cartesiana di una circonferenza, riconoscerà nell'equazione ricavata quella della circonferenza avente centro in H e raggio $r=\frac{\sqrt{10}}{2}$

Q2-Poiché il terzo vertice C′ del triangolo si trova sull'asse delle ascisse, avrà coordinate (x;0). Ponendo y=0 nella (*) si ricava la condizione per l'ordinata

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}\rightarrow\ x-\frac{1}{2}=\pm\sqrt{\frac{5}{2}-\frac{1}{4}}\rightarrow\ x=\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}$$

Si hanno due valori per l'ascissa: $x_1=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2,\ x_2=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-1.$

Si riconosce che il primo valore corrisponde all'ascissa del vertice B. Evidentemente questa soluzione non è accettabile, perché il triangolo ABC avrebbe i due vertici B, C coincidenti e dunque sarebbe degenere e "non avrebbe necessariamente come circocentro il punto H". Il secondo valore fornisce come terzo vertice del triangolo il punto $C'(-1;0)$.

Ricerca del terzo vertice C″ del triangolo appartenente all'asse elle ordinate.

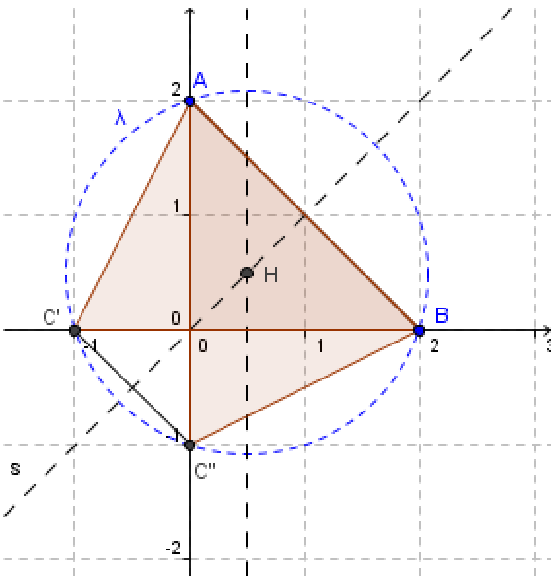
Si sviluppa un ragionamento analogo a quello seguito per la ricerca di C′. In questo caso è C″(0;y).

Ponendo x=0 nella (*) si ha

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}\rightarrow\ y=\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}\rightarrow\ y_1=-1, y_2=2.$$

Il primo valore è accettabile, mentre non lo è il secondo perché ad esso corrisponde come terzo vertice il punto A ed il triangolo sarebbe degenere.

Concludiamo che il terzo vertice del triangolo, se si deve trovare sull'asse delle ordinate, è $C''(0;-1)$.



Area del triangolo ABC′

Assumendo il lato AB come base risulta: $\overline{AB}=2\sqrt{2}$; l'altezza relativa è la distanza di C′ da AB. L'equazione della retta [A;B] è x+y-2=0 e dunque la misura dell'altezza è

$$d\left(C';[A;B]\right)=\frac{|-1-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

$$Area\left(ABC'\right)=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot d\left(C';[A;B]\right)=\ \frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}=3$$

Area del triangolo ABC″ (ha la stessa area di ABC′)

Osserviamo che il segmento C′C″ è parallelo al segmento AB; infatti la retta su cui giace ha equazione x+y+1=0, che rappresenta una retta parallela alla retta [A;B] e pertanto la distanza di C″ da AB è uguale a quella di C′ dallo stesso lato. In conclusione, anche il triangolo ABC″ ha area 3.

Q3- Abbiamo già precisato in Q2 che C′C″ è parallelo ad AB, dunque il quadrilatero ABC″C′ è un trapezio, con basi i segmenti AB, C′C″ . Osserviamo ora che $\overline{C'C''}=\sqrt{2}<\overline{AB}=2\sqrt{2}$.

Per dimostrare che si tratta di un trapezio isoscele basta provare che i due lati obliqui hanno la stessa misura.

$$\overline{AC'}=\sqrt{(0+1)^2+2^2}=\sqrt{5};\quad \overline{BC''}=\sqrt{(0-2)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{5}$$

Concludiamo che il trapezio è isoscele.