Geometria analitica della retta

(sui luoghi geometrici di un triangolo: baricentro)

Problema_2

Del triangolo ABC sono noti i vertici A(-2;0), B(1;3) e il baricentro $G\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Q1- Determinare le coordinate del terzo vertice C

Q2- Determinare le distanze del baricentro da ciascuno dei lati del triangolo.

Q3-Verificare che il baricentro ha distanza minore dal lato del triangolo che ha lunghezza maggiore e distanza maggiore dal lato del triangolo di lunghezza minore.

Soluzione

Q1- Le coordinate del terzo vertice C del triangolo si determinano sfruttando le formule che permettono di ricavare le coordinate del baricentro, note le coordinate dei tre vertici.

$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}\rightarrow x_C=3x_G-\left(x_A+x_B\right)=3\cdot 0-\left(-2+1\right)=1;$$

$$y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\rightarrow y_C=3y_G-\left(y_A+y_B\right)=3\cdot\frac{1}{2}-\left(0+3\right)=-\frac{3}{2};$$

il terzo vertice del triangolo è $C\left(1;-\frac{3}{2}\right)$.

Q2- Per trovare le distanze del baricentro da ciascuno dei lati del triangolo è necessario disporre delle equazioni delle rette dei lati. Ricaveremo perciò le equazioni delle tre rette suddette e successivamente utilizzeremo la formula della distanza di un punto da una retta per avere le misure delle distanze richieste.

$$[A;B]:\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}\rightarrow$$

$$\frac{x+2}{1+2}=\frac{y}{3}\rightarrow x-y+2=0;$$

$$[A;C]:\frac{x-x_A}{x_C-x_A}=\frac{y-y_A}{y_C-y_A}\rightarrow\frac{x+2}{1+2}=\frac{y}{-\frac{3}{2}}\rightarrow$$

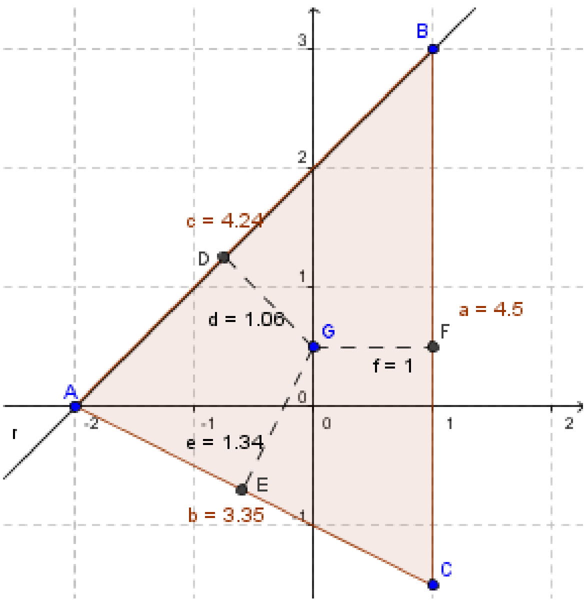
$$x+2y+2=0;$$

l'equazione della retta del lato BC è $x=1$[1].

Calcolo delle distanze del baricentro dai tre lati.

Ricordando che la formula della distanza del punto $P(x_0;y_0)$ dalla retta $r{:}ax+by+c=0$ è

$$d\left(P;r\right)=\frac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}},$$



[1] Si osservi che avendo i punti B e C la stessa ascissa, per ricavare l'equazione della retta del lato BC non è applicabile la forma utilizzata per le rette degli altri due lati.

per i tre lati si ha:

$$d(G;AB)=\frac{\left|1\cdot 0-1\cdot\frac{1}{2}+2\right|}{\sqrt{2}}=\frac{3}{2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}\approx 1,06;$$

$$d(G;AC)=\frac{\left|1\cdot 0+2\cdot\frac{1}{2}+2\right|}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}\approx 1,34;$$

$$d(G;BC)=\left|x_G-1\right|=1$$

Q3- Nella figura riportata sono rappresentati tutti gli elementi geometrici utili alla comprensione del problema risolto. In particolare:

1) le misure dei lati AB, AC, BC sono indicate rispettivamente con *c*, *b*, *a* e sono riportati i relativi valori approssimati al centesimo: *c*=4,24; *b*=3,35; *a*=4,5.
2) Sono riportati con stile tratteggio i segmenti delle perpendicolari condotte dal baricentro G ai tre lati. I piedi di dette perpendicolari sono i punti D, E, F e le misure delle distanze del baricentro dai lati AB, AC, BC sono rispettivamente *d*=1,06; *e*=1,34; *f*=1; anche in questo caso i valori sono approssimati al centesimo per le prime due, mentre è esatto il valore di *f*.
3) Dal confronto dei valori delle misure delle distanze di G dai lati trovati e dalle misure indicate per i lati del triangolo(2) emergono le disuguaglianze:

   $\overline{AC}<\overline{AB}<\overline{BC}$;

   $d(G;BC)<d(G;AB)<d(G;AC)$.

Invito alla riflessione

Si osservi che le disuguaglianze indicate sussistono in ciascun triangolo scaleno e si possono giustificare tenendo presente la formula per il calcolo dell'area di un triangolo (base· altezza/2) e applicando opportunamente un corollario del teorema di Talete. Infatti, poiché uno qualsiasi dei tre lati può essere assunto come base, è evidente che al lato maggiore corrisponderà l'altezza minore.

Il lettore è invitato a sviluppare ulteriormente le considerazioni qui esposte.

(2) Si invita il lettore a determinare le misure dei lati del triangolo ABC applicando la formula per la distanza tra due punti e riscontrare quanto affermato.